中国科学 E 辑: 信息科学
2007 年 第 37 卷 第 6 期: 757~769
http://www.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

论 Lorenz 系统族的全局指数吸引集和正向不变集

廖晓昕[1*] 罗海庚[1] 傅予力[2] 谢胜利[2] 郁 培[3]

(1. 华中科技大学控制科学与工程系, 武汉 430074; 2. 华南理工大学电子信息学院, 广州 510640;
3. Department of Applied Mathematics, The University of Western Ontario, London, N6A 5B7, Canada)

摘要 对于参数在两类区间内变化的 Lorenz 系统无穷族和两类新的 Lorenz 型混沌系统, 首次提出全局指数吸引集的概念, 且给出此类集的指数吸引估计式. 作为推论囊括了现有文献中关于Lorenz族全局吸引集的所有结果为特例, 且简化了前人的复杂证明, 特别对于 $b\to 1^+$ 和 $q\to 0^+$ 等前人方法失效的奇异情形, 也得到圆满解决.

关键词 Lorenz 系统族 全局指数吸引集 Lagrange 稳定性 广义 Lyapunov 函数

对于著名的 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x),\\ \dot{y}=cx-y-xz,\\ \dot{z}=xy-bz,\end{cases}\qquad a=10,\ \ b=\frac{8}{3},\ \ c=28, \tag{1}$$

已有文献 [1~5]阐明其有重要的理论意义和应用价值. 文献 [6]因解决了 21 世纪著名的Smale第 14 问题而备受人们关注. 文献中提到, 从微分方程(1)本身摄取吸引子的信息是极端困难的, 已有的结果大都是计算机仿真, 直到2002年, 文献[4]才报道了文献[6]从数学理论高度严格地论证了Lorenz蝴蝶吸引子的存在性的信息.

这里, 先简略地概述方程(1)的全局吸引集的研究动态和进展.

俄罗斯学者Leonov[7]最先得到方程(1)关于y和z的全局吸引集估计

$$y^2+(z-c)^2\leqslant\frac{b^2c^2}{4(b-1)}, \tag{2}$$

但没有 x 的相应估计.

收稿日期: 2005-11-29; 接受日期: 2007-02-27
国家自然科学基金(批准号: 60474011, 60274007)、杰出青年基金(批准号: 60325310)和广东省自然科学基金(批准号: 05006508)资助项目
* 联系人, E-mail: xiaoxin_liao@hotmail.com

文献 [7]介绍了前人关于x的 5 个最终有界的数字估计式

$$|x| \leqslant 21, \qquad |x| \leqslant 28.92, \qquad |x| \leqslant 39.246, \qquad |x| \leqslant 21.412, \qquad |x| \leqslant 22.821. \tag{3}$$

这 5 个数字相差甚大，似乎规律不明，更重要的是没有用a, b, c参数解析表达．为此文献 [7]给出关于x, y, z 3 个变量的统一全局吸引集估计

$$x^2 + y^2 + (z - a - c)^2 \leqslant \frac{b^2 (a+c)^2}{4(b-1)}. \tag{4}$$

但(4)式对于 y 和 z 的估计明显地较(2)式保守.

文献 [8]猜想，大概 x 也应有 y 同样的最终界的估计

$$x^2 \leqslant \frac{b^2 c^2}{4(b-1)}, \tag{5}$$

但没有提供严格的理论证明.

文献 [9~11]中给出了方程(1)的全局吸引集的新的估计，不仅改进、推广和包含了文献 [7, 8]的结果，且严格地证明了(5)式，较大地简化了Leonov的证明．最近文献 [10]用Lagrange乘子和优化方法，给出了一类Lorenz族的估计，方法简洁，特别解决了文献 [7]的方法失效的奇异情形，$b \to 1^+$，但x, y, z仍统一在一个公式中，未能避免文献 [7]的保守性．同时，当 $a \to 0^+$ 时，文献 [11]的方法失效.

直至目前，还未有人提出 Lorenz 全局指数吸引集的概念，故从吸引集外轨线走向吸引集的速度是未知的.

本文提出全局指数吸引集新概念，且给出此类集的指数估计，作为推论，囊括了前人已有的一切有关全局吸引集的结果为特例，同时解决了用前人方法失效的 $b \to 1^+$ 和 $a \to 0^+$ 的奇异情形.

1 有限区间 Lorenz 族的全局指数吸引集

陈关荣和吕金虎 [5]提出了如下的Lorenz族:

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - (8+\alpha)z/3, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\alpha \in [0,1]$, 文献 [10]研究了当 $\alpha \in [0,1/29)$ 时，(6)式的全局吸引集．现在我们来研究(6)式，当 $\alpha \in [0,1/29)$ 时的全局指数吸引集.

为表示与 Lorenz 族的区别，我们称此类系统为有限区间 Lorenz 族.

引进以下简化记号：令

$$a_\alpha = (25\alpha + 10), \qquad b_\alpha = \frac{\alpha + 8}{3}, \qquad c_\alpha = (28 - 35\alpha), \qquad d_\alpha = (1 - 29\alpha).$$

当 $\alpha \in [0,1/29)$, $a_\alpha \in [10, 10 + 35/29)$, $b_\alpha \in [8/3,\ (8 + 1/29)/3)$, $c_\alpha \in [28 - 35/29, 28)$, $d_\alpha \in (0,1]$ 时，可以改写(6)式为

$$\begin{cases}\dot{x}=a_\alpha(y-x),\\ \dot{y}=c_\alpha x-xz-d_\alpha y,\\ \dot{z}=xy-b_\alpha z.\end{cases} \tag{7}$$

在文献 [9]中，我们称

$$V_\lambda(X)=\frac{1}{2}\{\lambda x^2+y^2+(z-\lambda\alpha_\alpha-c_\alpha)^2\} \quad (\lambda \geqslant 0) \tag{8}$$

为(7)式的广义正定径向无界的 Lyapunov 函数， 其中 $X=(x,y,z)$.

定义　若存在正数 $L_\lambda>0$，则对于 $V_\lambda(X_0)>L_\lambda$，且 $V_\lambda(X_t)>L_\lambda$，有

$$V_\lambda(X(t))=V_\lambda(X(t,t_0,X_0))\to L_\lambda,$$

当 $t\to+\infty$ 时，称 $\Omega_\lambda=\{X\,|\,V_\lambda(X)\leqslant L_\lambda\}$ 为(7)式的一个全局吸引集．若 $\forall x_0\in\Omega_\lambda$，$\forall t>t_0$，$x(t,t_0,x_0)\leqslant\Omega_\lambda$，则称 Ω_λ 为正向不变集.

若还存在 $r_\lambda>0$，$\forall X_0\in\mathbb{R}^3$，当 $V_\lambda(X_0)>L_\lambda$，$V_\lambda(X(t))>L_\lambda$ 时，存在指数估计式

$$V_\lambda(X(t))-L_\lambda\leqslant(V_\lambda(X_0)-L_\lambda)\mathrm{e}^{-r_\lambda(t-t_0)},$$

则称 Ω_λ 为(7)式的一个全局指数吸引集.

定理 1　令 $L_\lambda=b_\alpha^2(\lambda a_\alpha+c_\alpha)^2/8(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha$，则(7)式有如下全局指数吸引集估计式：

$$V_\lambda(X(t))-L_\lambda\leqslant(V_\lambda(X_0)-L_\lambda)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)}, \tag{9}$$

特别地，

$$\Omega_\lambda=\{X\,|\,V_\lambda(X)\leqslant L_\lambda\}=\left\{X\,|\,\lambda x^2+y^2+(z-\lambda a_\alpha-c_\alpha)^2\leqslant\frac{b_\alpha^2(\lambda a_\alpha+c_\alpha)^2}{4(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}\right\}$$

为(7)式的全局吸引集.

证明　令

$$f(z)=-(b_\alpha-d_\alpha)^2z^2+(b_\alpha-2d_\alpha)(\lambda a_\alpha+c_\alpha)z$$

和

$$f'(z)=-2(b_\alpha-d_\alpha)z+(b_\alpha-2d_\alpha)(\lambda a_\alpha+c_\alpha)=0,$$

得到

$$z_0=\frac{(b_\alpha-2d_\alpha)(\lambda a_\alpha+c_\alpha)}{2(b_\alpha-d_\alpha)},$$

因为 $b_\alpha>2,\ 0<d_\alpha\leqslant1$，故 $z_0>0$，从而

$$f''(z_0)=-2(b_\alpha-d_\alpha)<0,$$

故

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}f(z)=f(z_0)=\frac{(\lambda a_\alpha+c_\alpha)(b_\alpha-2d_\alpha)}{4(b_\alpha-d_\alpha)}.$$

利用 $a_\alpha>1,\ 0<d_\alpha\leqslant1$，当 $V_\lambda\geqslant L_\lambda$ 时便有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V_\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} &= \lambda x\dot{x} + y\dot{y} + (z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)\dot{z} = -\lambda a_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha z^2 + b_\alpha(\lambda a_\alpha + c_\alpha)^2 \\
&= -\lambda a_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha z^2 + 2d_\alpha(\lambda a_\alpha + c_\alpha)z - (b_\alpha - d_\alpha)z^2 + (b_\alpha - 2d_\alpha)(\lambda \alpha_\alpha + c_\alpha)z \\
&\leqslant -\lambda a_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha(z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)^2 + d_\alpha(\lambda a_\alpha + c_\alpha)^2 + f(z) \\
&\leqslant -\lambda d_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha(z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)^2 + d_\alpha(\lambda a_\alpha + c_\alpha)^2 + f(z_0) \\
&= -\lambda d_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha(z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)^2 + \frac{d_\alpha(\lambda a_\alpha + c_\alpha)^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)} \\
&\leqslant -\lambda d_\alpha x^2 - d_\alpha y^2 - d_\alpha(z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)^2 + 2d_\alpha L_\lambda \\
&\leqslant -2d_\alpha V_\lambda + 2d_\alpha L_\lambda \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

利用比较定理对(10)式两边进行积分有

$$
\begin{aligned}
V_\lambda(X(t)) &\leqslant V_\lambda(X_0)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-\tau)} 2d_\alpha L_\lambda \mathrm{d}\tau \\
&= V_\lambda(X_0)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)} + L_\lambda(1-\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)}),
\end{aligned}
$$

从而当 $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$, $V_\lambda(X_0) > L_\lambda$ 时, 有全局指数估计式

$$
(V_\lambda(X(t)) - L_\lambda) \leqslant (V_\lambda(X_0) - L_\lambda)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)}. \tag{11}
$$

根据定义可知, (11)式说明 Ω_λ 对(11)式两边取上极限便有

$$
\overline{\lim_{t\to\infty}} V_\lambda(X(t)) \leqslant L_\lambda,
$$

即

$$
\Omega_\lambda = \{X \mid V_\lambda(X(t)) \leqslant L_\lambda\} = \left\{X \mid \lambda x^2 + y^2 + (z-\lambda a_\alpha - c_\alpha)^2 \leqslant \frac{b_\alpha^2(\lambda a_\alpha + c_\alpha)^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha}\right\}
$$

为(7)式的全局指数吸引集和全局吸引集.

注 1 1)取 $\alpha = 0$, $\lambda \geqslant 0$ 时, 定理 1 便是文献 [9]定理 1 的推广.

2)取 $\alpha = 0$, $\lambda = 0$ 时, 定理 1 便是Leonov[7]估计式(2)的推广.

3)取 $\alpha = 0$, $\lambda = 1$ 时, 定理 1 便是Leonov[7]估计式(4)的推广.

4)取 $\alpha \in [0, 1/29)$, $\lambda = 1$ 时, 定理 1 便是文献 [10]定理 1 的推广.

这里的推广是指从全局吸引集 [7,9,10]到全局指数吸引集.

定理 2 令

$$
V_0 = \frac{1}{2}[y^2 + (z-c)^2], \quad L_0 = \frac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{8(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha},
$$

则区间 Lorenz 族(7)式有如下全局指数吸引集估计式:

$$
\begin{cases}
V_0(X(t)) - L_0 \leqslant (V_0(X_0) - L_0)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)} \leqslant (V_0(X_0) - L_0)\mathrm{e}^{-\min(2d_\alpha, a_\alpha)(t-t_0)}, \\
x^2(t) - 2L_\alpha \leqslant (x_0^2 - 2L_0)\mathrm{e}^{-a_\alpha(t-t_0)} \leqslant (x_0^2 - 2L_0)\mathrm{e}^{-\min(2d_\alpha, a_\alpha)(t-t_0)}.
\end{cases}
$$

特别地,

$$\Omega_0 = \left\{ X \left| \begin{matrix} V_0(X) \leqslant L_0 \\ X^2 \leqslant L_0 \end{matrix} \right. \right\} = \left\{ X \left| \begin{matrix} y^2 + (z-c)^2 \leqslant \dfrac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha} \\ x^2 \leqslant \dfrac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha} \end{matrix} \right. \right\} \tag{12}$$

为(7)式的全局吸引集.

证明　在定理 1 中取 $\lambda = 0$，完全类似于定理 1 的证明可得到关于 y 和 z 的全局指数吸引集的估计

$$V_0(X(t)) - L_0 \leqslant (V_0(X_0) - L_0)\mathrm{e}^{-2d_\alpha(t-t_0)}, \tag{13}$$

对(13)式两边取上极限便有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} V_0(X(t)) \leqslant L_0,$$

即

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (y^2(t) + z(t) - c_\alpha)^2 \leqslant \frac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha} = 2L_0.$$

进而关于 y 有最终界的估计式

$$y^2 \leqslant 2L_0.$$

对(7)式的第 1 个方程作径向无界的正定 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}x^2,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} = -a_\alpha x^2 + a_\alpha xy \leqslant -a_\alpha x^2 + a_\alpha |x||y|$$

$$\leqslant -a_\alpha x^2 + \frac{1}{2}a_\alpha x^2 + a_\alpha L_0 = -a_\alpha V + a_\alpha L_0,$$

从而有

$$V(X(t)) - L_0 \leqslant (V(X_0) - L_0)\mathrm{e}^{-a_\alpha(t-t_0)},$$

即

$$x^2(t) - \frac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha} \leqslant \left(x_0^2 - \frac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha} \right)\mathrm{e}^{-a_\alpha(t-t_0)},$$

最终有

$$\lim_{t\to\infty} x^2(t) \leqslant \frac{b_\alpha^2 c_\alpha^2}{4(b_\alpha - 1)} = 2L_0,$$

即 Ω_0 为全局吸引集.

注 2　定理 2 所给出的全局吸引集 Ω_0，改进和推广了文献 [10]的定理 1. 由文献 [10]的定理 1，有

$$R_1^2 := \frac{(19-5\alpha)^2(8+\alpha)^2}{(15+264\alpha)(1-29\alpha)} = \frac{b_\alpha^2(c_\alpha + a_\alpha)^2}{4(b_\alpha - d_\alpha)d_\alpha}.$$

因为

$$\frac{2L_0}{R_1^2}=\frac{c_\alpha^2}{(c_\alpha^2+a_\alpha^2)}<1,$$

所以我们的估计式比文献 [11]的更精确. 具体比较为

$$x^2(t)\leqslant y^2(t)\leqslant\frac{b_\alpha^2c_\alpha^2}{4(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}<\frac{b_\alpha^2(c_\alpha+a_\alpha)^2}{4(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha},$$

$$\begin{aligned}c_\alpha+a_\alpha-\frac{b_\alpha(c_\alpha+a_\alpha)}{2\sqrt{(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}}<c_\alpha-\frac{b_\alpha c_\alpha}{2\sqrt{(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}}<z\\ \leqslant c_\alpha+\frac{b_\alpha c_\alpha}{2\sqrt{(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}}\leqslant c_\alpha+a_\alpha+\frac{b_\alpha(a_\alpha+c_\alpha)}{2\sqrt{(b_\alpha-d_\alpha)d_\alpha}}.\end{aligned}\tag{14}$$

(14)式中间是我们的估计式, 左右两端是文献 [10]的估计式.

2 无界区间 Lorenz 系统族的全局指数吸引集

仍考虑(1)式, 其中 $a\in(0,+\infty)$, $b\in(0,+\infty)$, $c\in[1,+\infty)$, 此时称(1)式为无界区间 Lorenz 系统族, 因为系数在无界区间内变化. 当 a, b, c 取某些参数时, 例如 a, b, c 在(6)式规定的有限区间内变化, 也许 a, b, c 为另一些参数, 则(1)式为正常系统, 不管(1)式是否混沌, 我们统一研究(1)式的全局指数吸引域是有意义的.

定理 3 令

$$\bar V_\lambda=\frac{1}{2}[\lambda x^2+y^2+(z-\lambda a-c)^2],\quad L_\lambda^{(1)}=\frac{(\lambda a+c)^2b^2}{8(b-1)},$$

$$L_\lambda^{(2)}=\frac{(\lambda a+c)^2}{2},\quad L_\lambda^{(3)}=\frac{(\lambda a+c)^2b^2}{8a(b-1)},$$

则无界区间 Lorenz 系统(1)有下列全局指数吸引集估计式:

$$\begin{cases}\bar V_\lambda(X(t))-L_\lambda^{(1)}\leqslant(\bar V_\lambda(X_0)-L_\lambda^{(1)})\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}, & \text{当 } a\geqslant1,\ b\geqslant2,\\ \bar V_\lambda(X(t))-L_\lambda^{(2)}\leqslant(\bar V_\lambda(X_0)-L_\lambda^{(2)})\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}, & \text{当 } a>\dfrac{b}{2},\ b<2,\\ \bar V_\lambda(X(t))-L_\lambda^{(3)}\leqslant(\bar V_\lambda(X_0)-L_\lambda^{(3)})\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}, & \text{当 } 0<a<1,\ b\geqslant2a.\end{cases}$$

特别地,

$$\Omega_\lambda^{(i)}=\{X\,|\,\bar V_\lambda(X)\leqslant L_\lambda^{(i)}\}=\{X\,|\,\lambda x^2+y^2+(z-\lambda a-c)^2\leqslant 2L_\lambda^{(i)}\},\quad i=1,2,3$$

为(1)式的全局吸引集.

证明 取

$$\bar V_\lambda=\frac{1}{2}[\lambda x^2+y^2+(z-\lambda a-c)^2].$$

1) 当 $a\geqslant1$, $b\geqslant2$ 时, 类似于(10)式的推导有

$$\frac{\mathrm{d}\bar V_\lambda}{\mathrm{d}t}\leqslant-\lambda x^2-y^2-(z-\lambda a-c)^2+2L_\lambda^{(1)}=-2\bar V_\lambda+2L_\lambda^{(1)},$$

故有

$$(\bar V_\lambda(X(t))-L_\lambda^{(1)})\leqslant(\bar V_\lambda(X_0)-L_\lambda^{(1)})\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}.\tag{15}$$

2) 当 $a > b/2, b < 2$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{V}_\lambda}{\mathrm{d}t} &\leqslant -\lambda a x^2 - y^2 - bz^2 + b(\lambda a + c)z \\ &\leqslant -\lambda\frac{b}{2}x^2 - \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}z^2 + \frac{b}{2}(2(\lambda a + c))z \\ &\leqslant -\lambda\frac{b}{2}x^2 - \frac{b}{2}y^2 - \frac{b}{2}(z - \lambda a - c)^2 + \frac{b}{2}(\lambda a + c)^2 \\ &\leqslant -\frac{b}{2}(2\bar{V}_\lambda + 2L_\lambda^{(2)}) = -b(\bar{V}_\lambda - L_\lambda^{(2)}),\end{aligned}$$

故有

$$(\bar{V}_\lambda(t) - L_\lambda^{(2)}) \leqslant (\bar{V}_\lambda(X_0) - L_\lambda^{(2)})\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}. \tag{16}$$

3) 当 $a < 1,\ b \geqslant 2a$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{V}_\lambda}{\mathrm{d}t} &= -\lambda a x^2 - y^2 - bz^2 + b(\lambda a + c)z \\ &\leqslant -\lambda a x^2 - a y^2 - a z^2 + 2a(\lambda a + c)z - a(\lambda a + c)^2 \\ &\quad + (a - b)z^2 + (b - 2a)(\lambda a + c)z + a(\lambda a + c)^2 \\ &\leqslant -a[\lambda x^2 + y^2 + (z - \lambda a - c)^2] + (a - b)z^2 + (b - 2a)(\lambda a + c)z + a(\lambda a + c)^2 \\ &\leqslant -a[a\bar{V}_\lambda - 2aL_\lambda^{(3)}],\end{aligned}$$

所以

$$(\bar{V}_\lambda(X(t)) - L_\lambda^{(3)}) \leqslant (\bar{V}_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda^{(3)})\mathrm{e}^{-2a(t-t_0)}. \tag{17}$$

分别对(15)~(17)式两边取上极限，便有

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}(\lambda x^2(t) + y^2(t) + (z - \lambda a - c)^2)\begin{cases}\leqslant \dfrac{(\lambda a + c)^2 b^2}{4(b-1)}, & \text{当 } a \geqslant 1,\ b \geqslant 2, \\ \leqslant (\lambda a + c)^2, & \text{当 } a > \dfrac{b}{2},\ b < 2, \\ \leqslant \dfrac{(\lambda a + c)^2 b^2}{4a(b-a)}, & \text{当 } a < 1,\ b \geqslant 2a.\end{cases} \tag{18}$$

注 3　当 $\lambda = 1$ 时, (18)式即为文献 [10]的估计式(12).

但定理 3 推广了 $\Omega_\lambda^{(i)}$ 为全局指数吸引集，且给出了轨线衰减的指数估计式，而且证明方法较文献 [10]更为初等、简洁.

由于(18)式中的第 3 个估计式是依赖于 a 的，故当 $a \to 0$ 时，估计式变得平庸失效.

下面我们要给出一个不依赖于 a 的新的估计，以改进定理 3 的结果.

定理 4　令

$$\bar{V}_0 = \frac{1}{2}[y^2 + ((z - c)^2 - c)^2], \quad \bar{L}_0 = \frac{b^2 c^2}{8(b-1)},$$

则无界区间 Lorenz 系统(1)有下列全局指数吸引集估计式:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{V}_0(X(t))-\bar{L}_0)\leqslant(\bar{V}_0(X_0)-\bar{L}_0)\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\leqslant(\bar{V}_0(X_0)-\bar{L}_0)\mathrm{e}^{-\min(b,a)(t-t_0)},\\
&x^2(t)-\bar{L}_0\leqslant(X_0^2-\bar{L}_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\leqslant(X_0^2-\bar{L}_0)\mathrm{e}^{-\min(b,a)(t-t_0)}.
\end{aligned}\tag{19}
$$

特别地

$$
\bar{\Omega}_0=\left\{X\left|\begin{aligned}&y^2+(z-c)^2\leqslant\frac{b^2c^2}{4(b-1)}\\&x^2\leqslant\frac{b^2c^2}{4(b-1)}\end{aligned}\right.\right\}\tag{20}
$$

为(1)式的全局吸引集.

证明 对$\bar{V}_0$给(1)式的第2和3个方程求导, 仿照(17)式的推导, 再仿(14)式的推导, 可证结论成立(证略).

注 4 (19)与(20)式对a一致成立. 当$a\to0^+$时, 也有效. 同时(19)与(20)式比(17)和(18)式精确, 故定理4明确地改进和推广了文献[10]的相应结果.

3 两类新的 Lorenz 型混沌系统的全局指数吸引集

罗海庚[12]发现两类新型的Lorenz型混沌吸引子.

第1类混沌系统为

$$
\begin{cases}\dot{x}=-ax+by+yz,\\\dot{y}=cx-y-xz,\\\dot{z}=dy-z+xy.\end{cases}\tag{21}
$$

当$a=12$, $b=5$, $c=28$, $d=3$时, 上述系统有一个混沌吸引子, 如图1所示.

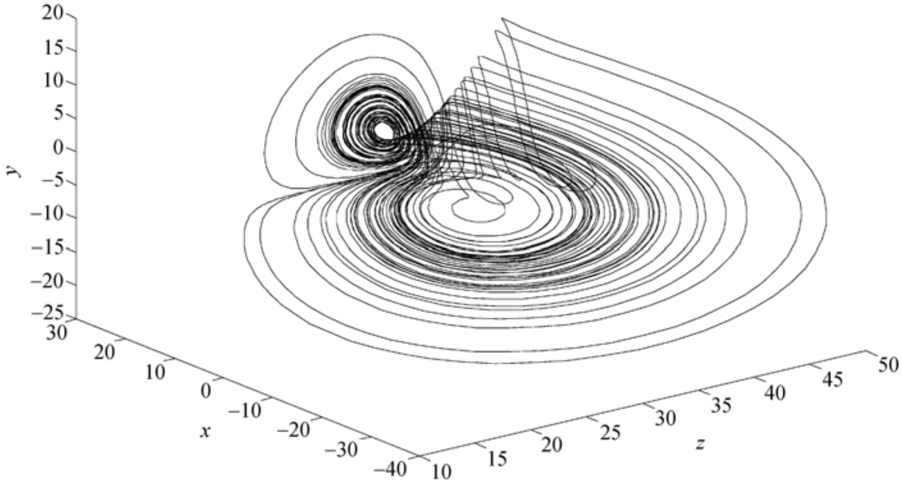

图1 系统(21)的混沌吸引子

第2类混沌系统为

$$
\begin{cases}\dot{x}=-ax+eyz+m,\\\dot{y}=bx-y-xz,\\\dot{z}=dy-z+xy.\end{cases}\tag{22}
$$

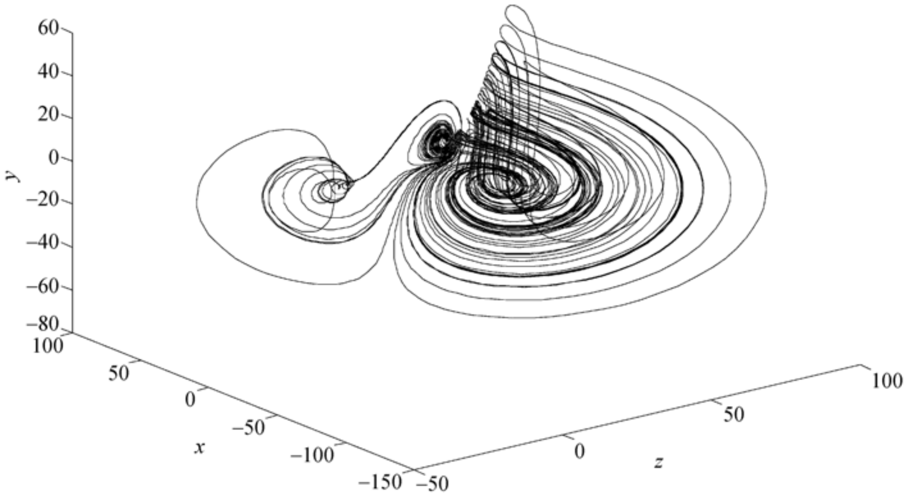

图 2　系统(22)的混沌吸引子

当 $a=11,\ b=35,\ c=15,\ d=2.5,\ e=1.38,\ m=1$ 时，该系统有如图 2 所示的混沌吸引子. 现在，我们给出这两类新混沌系统全局指数吸引集和正向不变集的估计式.

定理 5　令

$$\tilde{L}=\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}(b+2c)^2+\frac{(ad-d)^2}{2(2a-1)}+(b+c)^2d^2,$$

$$V=\frac{(x-d)^2+2y^2+(z-b-2c)^2}{2},$$

则当 $V(X_0)>\tilde{L}, V(X(t))>\tilde{L}$ 时，对于第 1 类系统(21)的轨线，有全局指数吸引集和正向不变集的估计式如下:

$$(V(X(t))-\tilde{L})\leqslant(V(X_0)-\tilde{L})\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)},$$

从而

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}V(X(t))\leqslant\tilde{L}.$$

证明　作广义正定的径向无界的 Lyapunov 函数

$$V=\frac{(x-d)^2+2y^2+(z-b-2c)^2}{2},$$

令

$$F(x,y,z)=-ax^2+adx-bdy-y^2-d(b+2c)z-z^2+\frac{(x-d)}{2}+\frac{(z-b-2c)}{2},$$

沿(22)式的正半轨线计算 V 的导数，有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(21)}&=(x-d)\dot{x}+2y\dot{y}+(z-b-2c)\dot{z}\\&=(x-d)(-ax+by+yz)+2y(cx-y-xz)+(z-b-2c)(dy-z+xy)\\&=-ax^2+bxy+xyz+adx-bdy-dyz+2cxy-2y^2-2xyz\\&\quad+dyz-z^2+xyz-d(b+2c)y+(b+2c)z-(b+2c)xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2}(x-d)^2-y^2-\frac{1}{2}(z-b-2c)^2-ax^2+adx-bdy-2y^2\\&\quad-d(b+2c)y+(b+2c)z-z^2+\frac{1}{2}(x-d)+\frac{1}{2}(z-b-2c)+y^2\\&=-V(X(t))+F(X(t)).\end{aligned}\tag{23}$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x-d-2ax+ad=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-2y-2bd-2dc=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-2z+(z-b-2c)+b+2c=0,$$

得到

$$x=\frac{ad-d}{2a-1},\quad y=-(b+c)d,\quad z=0.$$

再求 $F(x,y,z)$ 关于 (x,y,z) 的二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=1-2a<0,$$

当 $a>1/2$ (在(21)式中，$a=12>1/2$);

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2<0;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-1<0;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}=0.$$

因为 F 为二次函数，其局部极大值为全局极大值，因此

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}F(X)=F(X)\Big|_{x=\frac{ad-d}{2a-1},\,y=-(b-1)d,\,z=0}=\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}(b+2c)^2+\frac{(ad-d)^2}{2(2a-1)}+(bd+cd)^2=\tilde{L}.$$

仿前面定理可证

$$(V(X(t))-\tilde{L})\leqslant(V(X_0)-\tilde{L})\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)},$$

即

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}V(X(t))\leqslant\tilde{L}.$$

定理证毕.

定理 6 令

$$L^*=-\frac{cm}{e}+\frac{c^2}{2e}+2b^2+(bc)^2+\frac{(bd-d)^2}{2(2d-1)}+\frac{(m/e+ac/e-1/e)^2}{4(a/c-1/2e)^2},$$

$$V=\frac{1}{2e}(x-c)^2+y^2+\frac{1}{2}(z-2b)^2,$$

当 $V(X_0)>L^*, V(X(t))>L^*$ 时, (22)式的解有如下全局指数吸引集和正向不变集的估计式:

$$(V(X(t))-L^*)\leqslant(V(X_0)-L^*)\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)}.$$

证明 构造(22)式的径向无界的广义正定函数

$$V=\frac{1}{2e}(x-c)^2+y^2+\frac{1}{2}(z-2b)^2,$$

则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(22)} &= \frac{1}{e}(x-c)(-ax+eyz+m)+2y(bx-y-xz)+(z-2b)(cy-dz+xy)\\
&= -\frac{a}{e}x^2+xyz+\frac{m}{e}x+\frac{ac}{e}x-cyz-\frac{cm}{e}+2bxy-2y^2-2xyz\\
&\quad +cyz-dz^2+xyz-2bcy+2bdz-2bxy\\
&= -\frac{a}{e}x^2+\left(\frac{m}{e}+\frac{ac}{e}\right)x-\frac{cm}{e}-2y^2-2bcy-dz^2+2bdz\\
&= -V-\frac{a}{e}x^2+\left(\frac{m}{e}+\frac{ac}{e}\right)x-\frac{cm}{e}-2y^2-2bcy-dz^2+2bdz\\
&\quad +\frac{1}{2e}x^2-\frac{c}{e}x+\frac{c^2}{2e}+y^2+\frac{1}{2}z^2-2bz+2b^2\\
&:= -V+F^*(X).\end{aligned}$$

令

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}=\frac{1-2a}{e}x+\frac{m+ac-c}{e}=0,\quad \frac{\partial F^*}{\partial y}=-2y-2bc=0,$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial z}=-2dz+z+2bd-2b=0,$$

得

$$x=\frac{m+ac-c}{2a-1},\quad y=-bc,\quad z=\frac{2bd-2b}{2d-1}.$$

再求二阶偏导数有

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2}=\frac{1-2a}{e}<0,$$

当 $a>1/2$ (在(22)式中，$a=11>1/2$)；

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2}=-2<0,$$

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2}=1-2d<0,$$

当 $d>1/2$;

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F^*}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 F^*}{\partial z\partial x}=0.$$

因此有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^3} F^*(X) &= F(X)\Big|_{x=\frac{m+ac-c}{2a-1},\,y=-bc,\,z=\frac{2bd-2b}{2d-1}}\\
&= -\frac{cm}{e}+\frac{c^2}{2e}+2b^2+(bc)^2+\frac{(bd-d)^2}{2(2d-1)}+\frac{(m/e+ac/e-1/e)^2}{4(a/c-1/2e)^2}=L^*,\end{aligned}$$

故

$$(V(X(t))-L^*)\leqslant(V(X_0)-L^*)\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)},$$

即

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}V(X(t))\leqslant L^*.$$

定理证毕.

4　应用

作为上述结果的直接应用, 我们将给出两个定理.

因为平衡位置、周期解和概周期解等都是有界的正向不变集, 故有

定理 7　在区间 Lorenz 系统(1)和(6)的全局吸引集之外, 不存在与全局吸引集不相交的有界的正向不变集.

证明　用反证法. 设系统(1)或(6)的任意一个全局吸引集为Ω, 则Ω外存在一个紧的正向不变集 Q, 且 $\Omega\cap Q=\Phi$, 即Ω与 Q 不相交, 从而

$$\inf_{\substack{X\in\Omega\\ \bar{X}\in Q}}\|X-\bar{X}\|>0.$$

根据正向不变集的定义, $\forall X_0\in Q, X(t,t_0,X_0)\in Q$. 故

$$\inf_{\substack{X\in\Omega\\ X(t,t_0,X_0)\in Q}}\|X-X(t,t_0,X_0)\|>0.$$

但另一方面, $X(t,t_0,X_0)\to\Omega$, $t\to+\infty$, 故

$$\inf_{\substack{X\in\Omega\\ X(t,t_0,X_0)\in Q}}\|X-X(t,t_0,X_0)\|=0,$$

这一矛盾说明了结论成立.

最后, 我们给出本文的估计式在系统(1)和(7)的原点(0, 0, 0)全局指数稳定的一个应用.

众所周知, 当 $0<c<1$ 时, (1)式的原点(0, 0, 0)是全局指数稳定的. 然而, 根据定理 1~4, 容易证明, 当 $c\leqslant 0$ 时, (1)和(7)式的原点(0, 0, 0)是全局指数稳定的.

定理 8　在(1)式中, 若 $c\leqslant 0$, 在(7)式中, 若 $c_\alpha\leqslant 0$, 则原点(0, 0, 0)是全局指数稳定的. 在(21)式中, 当 $b=c=d=0$, 或 $d=0, b=-2c$ 时, (21)式的平衡位置(0, 0, 0)是全局指数稳定的; 在(22)式中, 当 $a=b=c=m=0$ 时, 平衡位置(0, 0, 0)是全局指数稳定的.

证明　在系统(7)中, 取 $c_\alpha\leqslant 0$. 在定理 1 中, 选取 $\lambda=-c_\alpha/a_\alpha$, 则有 $L_{-c_\alpha/a_\alpha}=0$, 这样, 从(9)式推得

$$\left\{-\frac{c_\alpha}{a_\alpha}x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right\}\leqslant\left\{-\frac{c_\alpha}{a_\alpha}x^2(t_0)+y^2(t_0)+z^2(t_0)\right\}\mathrm{e}^{-\alpha d_\alpha(t-t_0)}.$$

在系统(7)中, 取 $c_\alpha=0$, 则在定理 2 中有 $L_0=0$, 这样

$$\left\{y^2(t)+z^2(t)\right\}\leqslant\left\{y^2(t_0)+z^2(t_0)\right\}\mathrm{e}^{-\alpha d_\alpha(t-t_0)},$$

且 $x^2(t)\leqslant y^2(t)\leqslant y^2(t_0)\mathrm{e}^{-\alpha d_\alpha(t-t_0)}$.

在系统(1)中, 当 $c<0$ 时, 取 $\lambda=-c/a$, 则有 $\bar{L}_\lambda^{(1)}=\bar{L}_\lambda^{(2)}=\bar{L}_\lambda^{(3)}=0$, 因此

$$\begin{cases} \bar{V}_\lambda(x(t)) \leqslant \bar{V}_\lambda(x_0)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}, & \text{当 } a \geqslant 1,\ b \geqslant 2, \\ \bar{V}_\lambda(x(t)) \leqslant \bar{V}_\lambda(x_0)\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}, & \text{当 } a > b/2,\ b < 2, \\ \bar{V}_\lambda(x(t)) \leqslant \bar{V}_\lambda(x_0)\mathrm{e}^{-2a(t-t_0)}, & \text{当 } 0 < a < 1,\ b > 2a, \end{cases}$$

这里

$$\bar{V}_\lambda(x(t)) = -\frac{c}{a}x^2 + y^2 + z^2.$$

若在系统(1)中取 c=0, 则在定理 4 中有 $\bar{L}_0 = 0$. 这就推出

$$\left\{y^2(t)+z^2(t)\right\} \leqslant \left\{y^2(t_0)+z^2(t_0)\right\}\mathrm{e}^{-2b(t-t_0)},$$

且 $x^2(t) \leqslant \left(y^2(t_0)+z^2(t_0)\right)\mathrm{e}^{-2b(t-t_0)}$.

对于(21)和(22)式的平衡位置(0, 0, 0)的全局指数稳定性可作类似的证明, 故略. 定理证毕.

参　考　文　献

1 Lorenz Z N. Deterministic non-periodic flow. J Atoms Sci, 1963, 20: 130—141

2 Lorenz E N. The Essence of Chaos. Washington: USA University of Washington Press, 1993

3 Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors. Berlin-Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976

4 Stwart I. The Lorenz attractor exists. Nature, 2002, 406: 948—949[DOI]

5 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003

6 Warwick T. A rigorous ODE solver and smale’s 14th problem. Found Comput, Math, 2002, 2: 53—117

7 Leonov G A, Bunin A L, Kokxh N. Atractor localization of the Lorenz system. ZAMM, 1987, 67: 649—656[DOI]

8 Leonov G A. Bound for attractors and the existence of Homoclinic orbits in the Lorenz system. J Appl Math Mechs, 2001, 65(1): 19—32[DOI]

9 廖晓昕. 论 Lorenz 混沌系统全局吸引集和正向不变集的新结果及对混沌控制与同步的应用. 中国科学, E 辑, 2004, 34(12): 1404—1419

10 Li D M, Lu J A, Wa X Q, et al. Estimating the bounded for the Lorenz family of chaotic systems. Chaos, Solutions Fractals, 2005, 23: 529—534[DOI]

11 Yu P, Liao X X. New estimates for globally attracvtive and positive invariant set ofyhe family of the Lorenz system. Int J Bifurcation & Chaos, 2006, 16(11): 3383—3390[DOI]

12 罗海庚. 几个新连续混沌系统的分析与控制. 博士论文. 武汉: 华中科技大学, 2007