Existencia de solución débil para el problema de Cauchy asociado al modelo ARG de flujo de tráfico.

Alejandro Santacruz Hidalgo.
Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

5 de septiembre de 2017

Existencia de solución débil para el problema de Cauchy asociado al modelo ARG de flujo de tráfico.

Alejandro Santacruz Hidalgo.
Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas.

Trabajo de tesis para optar al título de
Magíster en Ciencias Matemáticas.

Director
Juan Carlos Hernández Rincón.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
5 de septiembre de 2017

Título en español

Existencia de solución débil para el problema de Cauchy asociado al modelo ARG de flujo de tráfico.

Title in English

Existence of weak solution to the Cauchy problem associated to the ARG traffic model.

Resumen: En el presente trabajo se demuestra la existencia de solución débil o generalizada para el problema de Cauchy asociado con el modelo ARG de flujo de tráfico. Primero, se usa el principio del máximo junto con el método de regiones invariantes para demostrar la existencia de solución clásica para el problema difusivo asociado. Después, se utiliza el lema de Murat para probar resultados de compacidad que permiten aplicar el lema del Divergente-Rotacional junto con la técnica de viscosidad nula con el fin de mostrar la convergencia de una subsucesión de soluciones viscosas a una solución débil.

Palabras clave : Leyes de conservación, solución débil, compacidad compensada .

Abstract: In this thesis we prove the existence of weak or generalized solution of the Cauchy problem associated to the ARG traffic model. First, we use the maximum principle together with the invariant region method to prove the existence of a classical solution for the associated diffusion problem. Then, using Murat's lemma we prove compactness results that allow the use of the curl-div theorem together with the vanishing viscosity technique in order to show the convergence of a subsequence of viscosity solutions to a weak solution.

Agradecimientos

Al profesor Juan Carlos Hernández por su enorme ayuda y paciencia en el desarrollo de este trabajo.

A los profesores Leonardo Rendón, Fernando Zalamea y Juan Carlos Galvis sin los cuales no habría tenido esta oportunidad.

A mi padre, a mi madre y a mi hermano.

Índice general

Introducción.

En el presente trabajo se estudia la existencia de solución débil o generalizada para el problema de Cauchy asociado al modelo de tráfico ARG descrito en [8] por Greenberg, el cual es una extensión del modelo propuesto por A. Aw y M. Rascle en [1]. Dicho modelo es descrito por el siguiente sistema de dos ecuaciones de leyes de balance

$$\begin{cases} \rho_t + \Big(\rho v\Big)_x = 0 \\ \Big(\rho(v - u(\rho))\Big)_t + \Big(\rho v\Big(v - u(\rho)\Big)\Big)_x = \frac{\rho\Big(u(\rho) - v\Big)}{T}, \end{cases} \tag{.0.1}$$

donde $\rho = \rho(x,t)$ y $v = v(x,t)$ son, respectivamente, la densidad y la velocidad de los vehículos localizados en la posición x en el tiempo t. $u(\rho)$ es la velocidad de equilibrio, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u'(\rho) < 0 \\ 2u'(\rho) + \rho u''(\rho) > 0 \\ v - u(\rho) \geq 0, \end{cases} \tag{.0.2}$$

para $0 \leq \rho \leq \rho_m$, siendo ρ_m la máxima densidad de vehículos. La constante $T > 0$ es interpretada como el tiempo de relajación.
El problema de Cauchy asociado tiene como valor inicial

$$\Big(\rho(x,0), v(x,0)\Big) = \Big(\rho_0(x), v_0(x)\Big), \tag{.0.3}$$

donde $\rho_0(x)$ y $v_0(x)$ pertenecen a $L^\infty(\mathbb{R})$ y la aplicación $x \to v_0(x) - u(\rho_0(x))$ es de variación acotada.

Marco referencial.

Después de la crítica hecha por Daganzo [4], varios sistemas 2×2 de leyes de conservación fueron propuestos para modelar el flujo de tráfico, ver por ejemplo [1].

El modelo introducido por A. Aw y M. Rascle en [1] para flujo de tráfico es el siguiente

$$\begin{cases} \rho_t + \Big(\rho v\Big)_x = 0 \\ \Big(\rho u\Big)_t + \Big(\rho u v\Big)_x = 0, \end{cases} \tag{.0.4}$$

donde ρ es la densidad y $v = u - p(\rho)$ es la velocidad de los vehículos sobre la vía y $p(\rho)$ es una función suave estrictamente creciente. En [7] Zhang independientemente propuso el mismo modelo. Aw y Rascle en su artículo [1] estudiaron el problema de Riemann para el sistema (.0.4).

En [13], los autores muestran la existencia de solución débil entrópica para el problema de Cauchy asociado al sistema (.0.4) con valor inicial tomando valores en un dominio DV, siempre que los invariantes de Riemann estén en $BV(\mathbb{R})$, el espacio de funciones de variación acotada, y tomen valores en DV, $p(\rho)$ satisface las condiciones dadas en [1] junto con las siguientes

$$p'(0) = 0, p'(\rho) > 0 \quad \text{para} \quad \rho > 0 \;\; y \left|p(\rho_1) - p(\rho_2)\right| \leq L \left|\rho_1 - \rho_2\right|,$$

para alguna constante L.

Versiones mejoradas del modelo (.0.4) incluyen términos fuente como en [8], cuyo modelo fue generalizado posteriormente por Siebel y Mauser en [5]. En [13] la existencia de solución débil entrópica es probada para el problema de Cauchy asociado con una de estas versiones mejoradas y valor inicial en DV. Su resultado es válido para el término fuente introducido en [5] por Siebel y Mauser a la segunda ecuación del modelo Aw-Rascle, como también para la elección específica del término de relajación dado en [14] bajo otras condiciones adicionales. En [16] el modelo de Aw-Rascle es extendido por incluir un término fuente modelando una entrada a la vía. La versión de Zhang del modelo Aw-Rascle con relajación es estudiada en [19] y [20]. Rasgos debidos a entradas y salidas en la vía y cambios en la velocidad de los vehículos son introducidos en los modelos para el flujo de tráfico por medio de diferentes elecciones de términos fuente en [16].

Lu en [23] prueba la existencia de solución débil entrópica para el problema de Cauchy asociado al modelo Aw-Rascle con valor inicial acotado y medible. El modelo *ARG* en [8] es una extensión del modelo Aw-Rascle por incluir un término fuente en la segunda ecuación, en [8] el autor reformula el problema en coordenadas Lagrangianas, formulación que lo conduce a obtener un algoritmo computacional efectivo para resolver el sistema resultante.

En el presente trabajo se estudia la existencia de solución débil para el problema de Cauchy asociado al modelo ARG con condiciones iniciales acotadas y medibles, para establecer dicha existencia se utilizan los argumentos dados en [23] y en [15].

Notación.

- Ω : Subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto, acotado con frontera suave.
- $BV(\Omega)$: Espacio de funciones de variación acotada con dominio en Ω.
- $C^n(\Omega)$: Espacio de funciones con dominio en Ω y n-ésima diferencial continua.
- $C_0^\infty(\Omega)$: Espacio de funciones con dominio en Ω, infinitamente diferenciables con soporte compacto.
- $L^\infty(\Omega)$: Espacio de funciones esencialmente acotadas con dominio en Ω y que toman valores reales.
- $L^p(\Omega)$: Espacio de Lebesgue con dominio en Ω.
- $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: Espacio de funciones en $L^p(V)$ para todo compacto V contenido en Ω.
- $W^{m,p}(\Omega)$: Espacio de Sobolev de distribuciones tal que todas sus derivadas de orden menor o igual a m son funciones en $L^p(\Omega)$.
- $W_0^{m,p}(\Omega)$: Clausura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.
- $W^{-1,q}(\Omega)$: Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
- $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$: Espacio de distribuciones tal que todas sus derivadas de orden menor o igual a m son funciones en $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
- $H^m(\Omega)$: Espacio $W^{m,2}(\Omega)$.
- $H_0^m(\Omega)$: Espacio $W_0^{m,2}(\Omega)$.
- $H^{-1}(\Omega)$: Espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.
- $\mathscr{M}(B)$:Espacio de las medidas de Radon sobre B.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

En este capítulo se enuncian detalladamente conceptos, definiciones y algunos resultados teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Sistemas de leyes de conservación.

Se considera una función vectorial $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^m(x,t))$ donde x se interpreta como la variable espacial y t como la variable temporal, cada componente $u^j(x,t)$ es una función escalar de valor real y usualmente se interpretan como densidades de cantidades conservadas en un sistema físico, aquí la integral $\displaystyle\int_a^b u^j(x,t)dx$ se interpreta como la concentración de la cantidad en el intervalo (a,b) en el tiempo t.

Se considera una función flujo $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que gobierna la razón de cambio de cada cantidad y satisface

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u^j(x,t)dx = F^j(u^j(a,t)) - F^j(u^j(b,t)).$$

La igualdad anterior implica que el cambio de la cantidad u^j en (a,b) solo depende del flujo de u^j en los puntos frontera a y b. Reescribiendo la anterior ecuación se tiene que

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}u^j(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b u^j(x,t)dx = F^j(u^j(a,t)) - F^j(u^j(b,t)) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}F^j(u^j(x,t))dx.$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad $\displaystyle\int_a^b \Big(\frac{\partial}{\partial t}u^j(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}F^j(u^j(x,t))\Big)dx = 0$, como a, b y j son arbitrarios se deduce la ecuación vectorial

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

Al agregar una condición inicial se obtiene un **sistema de leyes de conservación**

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \quad , & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{1.1.1}$$

donde $g(x) = (g^1(x), g^2(x), \ldots, g^m(x))$ y el flujo son funciones conocidas, se supondrá que el flujo es una función diferenciable.

Observación 1. Se supuso una sola variable espacial por lo cual este sistema será un sistema **unidimensional** de leyes de conservación, en [11] se hace una introducción a los sistemas n-dimensionales de leyes de conservación.

Ejemplo 1. (Ecuación de Burgers).

Se toma el flujo **escalar** $F(z) = \dfrac{z^2}{2}$, obteniendo

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Ejemplo 2. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función conocida y el flujo $F(z_1, z_2) = (-z_2, -p(z_1))$, obteniendo

$$\begin{cases} (u^1)_t - (u^2)_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ (u^2)_t - (p(u^1))_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ (u^1(x,0), u^2(x,0)) = (g^1(x), g^2(x)). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Reescribiendo la función desconocida $u = (u^1, u^2) = (w_x, w_t)$ el sistema se convierte en

$$\begin{cases} w_{xt} = w_{tx} & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ w_{tt} - (p(w_x))_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ (w_x(x,0), w_t(x,0)) = (g^1(x), g^2(x)), \end{cases}$$

siendo este el problema de valores iniciales para la **ecuación de onda cuasilineal**.

Observación 2. Usando la regla de la cadena, la ecuación (1.1.1) se puede reescribir como

$$\begin{cases} u_t + DF(u)u_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{1.1.4}$$

donde $DF(u)$ es la matriz jacobiana de F calculada en u.

Definición 1. Dado el sistema de leyes de conservación (1.1.4) si para todo $z \in \mathbb{R}^m$ los valores propios de $DF(z)$ son reales el sistema es un **sistema hiperbólico**, si además son distintos el sistema se denomina **estrictamente hiperbólico**, si hay valores propios repetidos para algún z el sistema es **no estrictamente hiperbólico**.

Ejemplo 3. Considerar el sistema (1.1.3), la matriz jacobiana de F es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -p'(z_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es $\lambda^2 - p'(z_1) = 0$, cuyas raices son $\lambda_1 = \sqrt{p'(z_1)}$,$\lambda_2 = -\sqrt{p'(z_1)}$. El sistema será estrictamente hiperbólico si y sólo si la función p es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$.

1.2. Soluciones débiles.

Definición 2. (Solución débil) Dada $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty) : \mathbb{R}^m)$, es una solución débil del problema de valor inicial (1.1.1) si satisface

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle u, v_t\rangle + \langle F(u), v_x\rangle dxdt + \int_{-\infty}^\infty \langle g, v(x,0)\rangle dx = 0. \tag{1.2.1}$$

Para toda función $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ suave con soporte compacto.

Observación 3. Sí u es una solución clásica de (1.1.1) entonces tomando producto interno con v e integrando por partes se tiene la igualdad (1.2.1).

El siguiente ejemplo muestra que un sistema de leyes de conservación puede no tener soluciones clásicas, sin embargo puede que sí tenga soluciones débiles.

Ejemplo 4. Considérese la ecuación de Burgers (1.1.2) con la condición inicial

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x > 1 \\ 1 - x & \text{si } \; x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } \; x < 0. \end{cases}$$

Sea $x(t)$ la única solución del problema $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$ tal que $x(0) = x_0$, entonces si u es una solución clásica se tiene que

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x(x(t),t)\frac{dx}{dt} + u_t(x(t),t).$$

Como $u_t = -\frac{1}{2}2uu_x = -uu_x$ entonces

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x(x(t),t)\frac{dx}{dt} - u_x(x(t),t)u(x(t),t) = 0.$$

Por lo tanto, para cualquier punto inicial x_0, u es constante sobre estas curvas, luego $\frac{dx}{dt}(0) = u(x_0,0) = g(x_0)$, de esto se concluye que sobre la **recta** $\{(x_0 + tg(x_0),t), t \geq 0\}$ la solución toma el valor constante $g(x_0)$.

Si $x_0 = 1$ y $t = 2$ entonces $0 = g(1) = u(1 + 2g(1), 2) = u(1, 2)$, por otro lado, si $x_0 = -1$ entonces $1 = g(-1) = u(-1 + 2g(-1), 2) = u(1, 2)$, por lo tanto, u toma valores múltiples para el punto $(1, 2)$ lo cual es una contradicción.

La ecuación no tiene soluciones globales clásicas, sin embargo, la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x > 1, t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{si } \; t < x < 1 \\ 1 & \text{si} < t < 1 \\ 0 & \text{si} < \frac{t+1}{2}, t > 1 \\ 1 & \text{si} > \frac{t+1}{2}, t > 1 \end{cases}$$

es una solución débil global (ver [9] para la derivación detallada de esta solución).

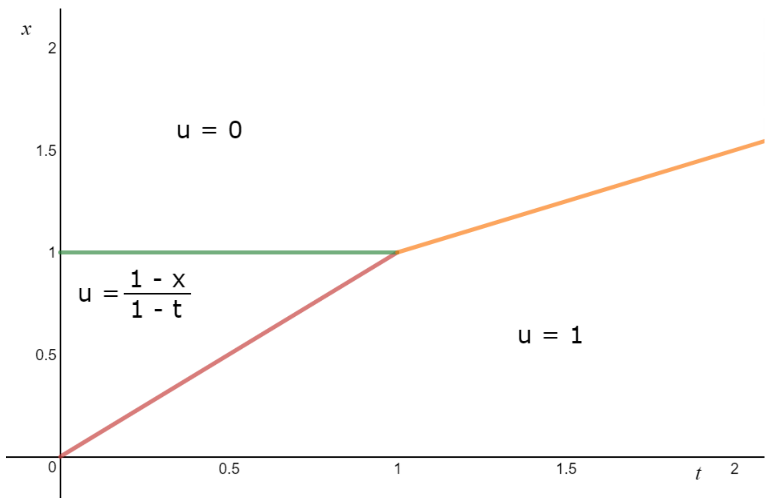

Figura 1.1: *Solución débil $u(x,t)$ para la ecuación de Burgers.*

Para ver que es una solución débil se calcula la integral $\displaystyle\iint_{t\geq 0} \left(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\right) dx\, dt$, donde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Partiendo el dominio en las regiones A, B, C donde u es $1, 0, \dfrac{1-x}{1-t}$ respectivamente

$$\iint_{t\geq 0} \left(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\right) dx\, dt = \iint_{A} \left(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\right) dx\, dt + \cancelto{0}{\iint_{B} \left(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\right) dx\, dt}$$
$$+ \iint_{C} \left(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\right) dx\, dt.$$

$$\iint\limits_{t\geq 0}\left(u\phi_t+\frac{u^2}{2}\phi_x\right)dx\,dt=\iint\limits_{A}\left(\phi_t+\frac{1}{2}\phi_x\right)dx\,dt+\iint\limits_{C}\left(\frac{1-x}{1-t}\phi_t+\frac{1}{2}\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)^2\phi_x\right)dx\,dt. \tag{1.2.2}$$

Aplicando teorema de Green a la integral $\iint\limits_{A}\left(\phi_t+\frac{1}{2}\phi_x\right)dx\,dt$

$$\iint\limits_{A}\left(\phi_t+\frac{1}{2}\phi_x\right)dx\,dt=\int\limits_{\partial A}\langle(\frac{\phi}{2},\phi),\nu\rangle ds=-\int_{-\infty}^{0}\phi(x,0)dx-\frac{1}{2}\int_0^1\phi(t,t)dt+\cancelto{0}{\int_0^{\infty}(\phi-\phi)dt}.$$

Calculando por partes la integral $\iint\limits_{C}\left(\frac{1-x}{1-t}\phi_t+\frac{1}{2}\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)^2\phi_x\right)dx\,dt$:

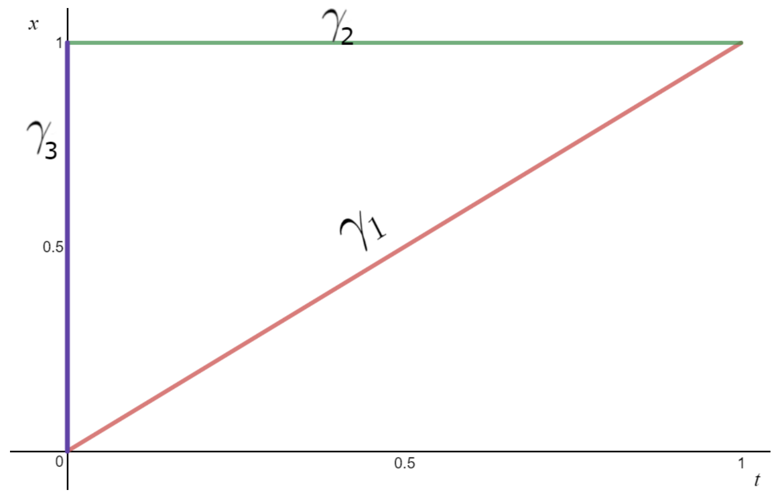

Figura 1.2: *Región C del plano , donde* $u(x,t)=\frac{1-x}{1-t}$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{C}\left(\frac{1-x}{1-t}\phi_t+\frac{1}{2}\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)^2\phi_x\right)dx\,dt=&-\iint\limits_{C}\phi\left[\cancelto{0}{\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)_t+\frac{1}{2}\Big(\frac{(1-x)^2}{(1-t)^2}\Big)_x}\right]dx\,dt\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\gamma_1}\phi\left\langle\left(\frac{1-x}{1-t},\frac{1}{2}\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)^2\right),\Big(1,-1\Big)\right\rangle ds\\&+\cancelto{0}{\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_3}\phi\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^2ds}\quad-\int\limits_{\gamma_4}\phi\frac{1-x}{1-t}ds.\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{C} \left(\frac{1-x}{1-t}\phi_t + \frac{1}{2}\Big(\frac{1-x}{1-t}\Big)^2\phi_x\right)dx\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\gamma_1} \phi\left\langle \Big(1,\frac{1}{2}\Big), \Big(1,-1\Big)\right\rangle ds - \int_0^1 \phi(x,0)\Big(1-x\Big)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(t,t)dt - \int_0^1 \phi(x,0)\Big(1-x\Big)dx.$$

Reemplazando en (1.2.2)

$$\iint\limits_{t\geq 0} \Big(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\Big)dx\,dt = \int_0^1 \phi(x,0)\Big(1-x\Big)dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x,0)dx.$$

Reemplazando por $g(x)$

$$\iint\limits_{t\geq 0} \Big(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\Big)dx\,dt = -\int_0^1 \phi(x,0)\Big(1-x\Big)dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x,0)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)g(x)dx.$$

Por lo tanto $\displaystyle\iint\limits_{t\geq 0} \Big(u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x\Big)dx\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)g(x)dx = 0$, luego $u(x,t)$ es una solución débil.

1.3. Invariantes de Riemann.

Dado un problema de valor inicial para un sistema estrictamente hiperbólico de leyes de conservación donde el flujo F tiene como dominio y codominio $\mathbb{R}^2$, es decir

$$\begin{cases} u^1_t + F^1(u^1,u^2)_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u^2_t + F^2(u^1,u^2)_x = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u^1(x,0) = g^1(x), \quad u^2(x,0) = g^2(x). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

En este sistema el flujo es $F = (F^1, F^2)$, la condición inicial $g = (g^1, g^2)$, la función desconocida $u = (u^1, u^2)$ y $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ valores propios de $DF(z)$ con $z \in \mathbb{R}^2$.

Definición 3. Dos funciones $w, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son invariantes de Riemann para el sistema (1.3.1) si satisfacen

$$\begin{cases} \nabla z(u)DF(u) = \lambda_1(u)\nabla z(u) & \text{si} \quad u \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla w(u)DF(u) = \lambda_2(u)\nabla w(u) & \text{si} \quad u \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Dicho de otra forma, los invariantes de Riemann son un par de funciones $w(u), z(u)$ tal que sus gradientes son vectores propios a izquierda de $DF(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, visto de forma escalar se tiene el sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 w_x - w_x F^1_x - w_t F^2_x = 0 \\ \lambda_2 w_t - w_x F^1_t - w_t F^2_t = 0 \\ \lambda_1 z_x - z_x F^1_x - z_t F^2_x = 0 \\ \lambda_1 z_t - z_x F^1_t - z_t F^2_t = 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

La relación entre los invariantes de Riemann y los valores propios del sistema quedan evidenciados en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Los invariantes de Riemann para el sistema (1.3.1) satisfacen el problema*

$$\begin{cases} w(u^1,u^2)_t + \lambda_2(u^1,u^2)w(u^1,u^2)_x = 0 \quad & si \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ z(u^1,u^2)_t + \lambda_1(u^1,u^2)z(u^1,u^2)_x = 0 \quad & si \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Demostración. Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} w(u^1,u^2)_t + \lambda_2(u^1,u^2)w(u^1,u^2)_x &= w_x(u^1,u^2)u^1_t + w_t(u^1,u^2)u^2_t \\ &\quad + \lambda_2\Big(w_x(u^1,u^2)u^1_x + w_t(u^1,u^2)u^2_x\Big). \end{aligned}$$

Como (u^1,u^2) es solución de (1.3.1), haciendo $A = w(u^1,u^2)_t + \lambda_2(u^1,u^2)w(u^1,u^2)_x:$

$$\begin{aligned} A &= w_x(u^1,u^2)\Big(-F^1_x u^1_x - F^1_t u^2_x\Big) + w_t(u^1,u^2)\Big(-F^2_x u^1_x - F^2_t u^2_x\Big) \\ &\quad + \lambda_2(u^1,u^2)\lambda_2\Big(w_x(u^1,u^2)u^1_x + w_t(u^1,u^2)u^2_x\Big). \end{aligned}$$

Reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} A &= u^1_x\Big(\lambda_2(u^1,u^2)w_x(u^1,u^2) - w_x(u^1,u^2)F^1_x - w_t(u^1,u^2)F^2_x\Big) \\ &\quad + u^2_x\Big(\lambda_2(u^1,u^2)w_t(u^1,u^2) - w_x(u^1,u^2)F^1_t - w_t(u^1,u^2)F^2_t\Big). \end{aligned}$$

Por (1.3.2)

$$w(u^1,u^2)_t + \lambda_2(u^1,u^2)w(u^1,u^2)_x = u^1_x(0) + u^2_x(0) = 0.$$

Por argumento análogo se tiene la otra ecuación del sistema (1.3.3).

□

En el siguiente ejemplo se calculan explícitamente los invariantes de Riemann.

Ejemplo 5. (Dinámica de un gas compresible barotrópico).

Suponiendo que la energía total del sistema es constante, las ecuaciones de Euler son

$$\begin{cases} \rho_t + \Big(\rho v\Big)_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \Big(\rho v\Big)_t + \Big(\rho v^2 + p(\rho)\Big)_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \end{cases} \tag{1.3.4}$$

las cuales son la conservación de masa y momentum respectivamente, se supondrá que la función p satisface $p'(\rho) > 0$.

Haciendo la transformación $m = \rho v$ se tiene el sistema equivalente de leyes de conservación

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ m_t + \Big(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\Big)_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases}$$

Con el flujo $F(z_1, z_2) = (z_2, \frac{z_2^2}{z_1} + p(z_1))$, cuyo jacobiano es

$$DF(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p'(z_1) - \Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2 & 2\frac{z_2}{z_1} \end{bmatrix},$$

tiene polinomio característico

$$\lambda^2 + \Big(-2\frac{z_2}{z_1}\Big)\lambda + \Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2 - p'(z_1) = 0.$$

Los valores propios de $DF(z_1, z_2)$ son

$$\lambda_1(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1} - \sqrt{p'(z_1)}\,, \quad \lambda_2(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1} + \sqrt{p'(z_1)}\,.$$

Reescribiendo el sistema (1.3.4)

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \rho_t v + \rho v_t + \rho_x v^2 + 2\rho v v_x + p_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $p'(\rho)$ obtenemos

$$\begin{cases} p_t + v p_x + p'(\rho)\rho v_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \rho_t v + \rho v_t + \rho_x v^2 + 2\rho v v_x + p_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por v y restándosela a la segunda

$$\begin{cases} p_t + v p_x + p'(\rho)\rho v_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ p v_t + p v v_x + p_x = 0 \quad \text{si} \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\sqrt{p'(\rho)}$, sumándola y restándola respectivamente a la primera

$$\begin{cases} p_t + p_x\Big(v + \sqrt{p'(\rho)}\Big) + \rho\sqrt{p'(\rho)}\left(v_t + v_x\Big(v + \sqrt{p'(\rho)}\Big)\right) = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ p_t + p_x\Big(v - \sqrt{p'(\rho)}\Big) - \rho\sqrt{p'(\rho)}\left(v_t - v_x\Big(v + \sqrt{p'(\rho)}\Big)\right) = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases}$$

aquí aparecen explícitamente los valores propios $\lambda_1(\rho, m)$, $\lambda_2(\rho, m)$, reemplazando se obtiene

$$\begin{cases} p_t + p_x\lambda_2(\rho,m) + \rho\sqrt{p'(\rho)}\Big(v_t + v_x\lambda_2(\rho,m)\Big) = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ p_t + p_x\lambda_1(\rho,m) - \rho\sqrt{p'(\rho)}\Big(v_t - v_x\lambda_1(\rho,m)\Big) = 0 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Sean $x_1(t), x_2(t)$ las curvas que satisfacen $\frac{dx_1}{dt}(t) = \lambda_2\Big(\rho(x_1(t),t), m(x_1(t),t)\Big)$ y $\frac{dx_2}{dt}(t) = \lambda_1\Big(\rho(x_1(t),t), m(x_1(t),t)\Big)$ respectivamente, entonces por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\Big[p(x_1(t),t)\Big] = p_{x_1}\frac{dx_1}{dt} + p_t = p_{x_1}\lambda_2\Big(\rho(x_1(t),t), m(x_1(t),t)\Big) + p_t,$$

$$\frac{d}{dt}\Big[v(x_2(t),t)\Big] = v_{x_2}\frac{dx_2}{dt} + v_t = p_{x_2}\lambda_1\Big(\rho(x_2(t),t), m(x_2(t),t)\Big) + v_t.$$

Reemplazando en el sistema (1.3.5) tenemos que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big[p(x_1(t),t)\big] + \rho(x_1(t),t)\sqrt{p'(\rho(x_1(t),t))}\,\frac{d}{dt}\big[v(x_1(t),t)\big] = 0 & \text{si} \quad t \in (0,\infty) \\ \frac{d}{dt}\big[p(x_2(t),t)\big] - \rho(x_2(t),t)\sqrt{p'(\rho(x_2(t),t))}\,\frac{d}{dt}\big[v(x_2(t),t)\big] = 0 & \text{si} \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Como $\frac{dp}{dt} = p'(\rho)\frac{d\rho}{dt}$ entonces sobre la curva $(x_1(t),t)$ se tiene

$$\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}\frac{dp}{dt} + \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho\sqrt{p'(\rho)}}\Big[\frac{dp}{dt} + \rho\sqrt{p'(\rho)}\frac{dv}{dt}\Big] = 0.$$

Análogamente sobre la curva $(x_2(t),t)$ se tiene

$$\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \frac{dv}{dt} = 0. \tag{1.3.6}$$

Por el teorema 1.1 se tiene que $0 = \frac{d}{dt}\Big[w(\rho(x_1(t),t), v(x_1(t),t))\Big]$ donde w es el primer invariante de Riemann, por la regla de la cadena

$$0 = \frac{\partial w}{\partial \rho}\frac{d}{dt}\Big[p(x_1(t),t)\Big] + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{d}{dt}\Big[v(x_1(t),t)\Big].$$

Para coincidir con (1.3.6) se debe tener $\dfrac{\partial w}{\partial p} = \dfrac{\sqrt{p'(\rho)}}{\rho}$ y $\frac{\partial w}{\partial v} = 1$.

De forma análoga se tiene $\dfrac{\partial z}{\partial p} = \dfrac{\sqrt{p'(\rho)}}{\rho}$ y $\frac{\partial z}{\partial v} = -1$.

Integrando se obtienen expresiones explícitas para los invariantes de Riemann

$$w(\rho, m) = \int_1^\rho \frac{\sqrt{p'(s)}}{s} ds + \frac{m}{\rho}, \qquad z(\rho, m) = \int_1^\rho \frac{\sqrt{p'(s)}}{s} ds - \frac{m}{\rho}.$$

1.4. Sistemas de leyes de balance.

Definición 4. Al agregar una función vectorial $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como término fuente a un sistema de leyes de conservación hiperbólico se obtiene un sistema de **leyes de balance**.

Un problema de Cauchy asociado a un sistema de leyes de balance es de la forma

$$\begin{cases} u_t^1 + F^1(u^1, u^2)_x = h^1 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u_t^2 + F^2(u^1, u^2)_x = h^2 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u^1(x,0) = g^1(x)\,, \quad u^2(x,0) = g^2(x). \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Naturalmente u es una solución débil de (1.4.1) si satisface

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle u, v_t\rangle + \langle F(u), v_x\rangle dxdt + \int_{-\infty}^\infty \langle g, v(x,0)\rangle dx = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle h, v\rangle dxdt$$

Igualmente un par de funciones w, z serán invariantes de Riemann del sistema (1.4.1) si satisfacen

$$\begin{cases} \nabla z(u) DF(u) = \lambda_1(u) \nabla z(u) & \text{si} \quad u \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla w(u) DF(u) = \lambda_2(u) \nabla w(u) & \text{si} \quad u \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Y extendiendo el teorema 1.1 se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} w(u^1, u^2)_t + \lambda_2(u^1, u^2) w(u^1, u^2)_x = h^1 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ z(u^1, u^2)_t + \lambda_1(u^1, u^2) z(u^1, u^2)_x = h^2 & \text{si} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \end{cases}$$

1.5. Regiones invariantes.

Se considera el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon D v_{xx} + M v_x + f(x,t) & \text{si} \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1.5.1}$$

donde $\epsilon > 0$, la función vectorial $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, las funciones $D = D(v,x)$, $M = M(v,x)$ son funciones de valor matricial definidas sobre un subconjunto abierto $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \Omega$, f es una función suave con valores en $\mathbb{R}^n$ y en el caso que Ω no sea todo $\mathbb{R}$ se agregan condiciones de frontera.

Se asume que dada $v_0 \in X$ para un conjunto de funciones suaves de $\Omega \to \mathbb{R}^n$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el problema (1.5.1) tiene una solución $v(\bullet, t) \in X$ para $t \in [0, \delta)$.

Definición 5. Un subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una región invariante para la solución local de (1.5.1) si para toda solución $v(x,t)$ con todas sus condiciones iniciales y de frontera en Σ satisface $v(x,t) \in \Sigma$ para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0, \delta)$.

Observación 4. Para los propósitos de este trabajo son de interés los sistemas difusivos asociados a sistemas de leyes de balance del tipo (1.4.1), por lo tanto, consideramos a D como la identidad, a $-M$ como el jacobiano del flujo, a $\Omega = \mathbb{R}$ y $n = 2$.

La siguiente caracterización de regiones invariantes es un caso particular de la teoría más general desarrollada en el capítulo 14 de [9].

Sean $G_i : U \to \mathbb{R}$ funciones suaves cuyo gradiente ∇G_i nunca es nulo, se define el conjunto

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{m} \{v \in U : G_i(v) \leq 0\}. \tag{1.5.2}$$

El siguiente teorema da condiciones suficientes para que Σ sea una región invariante, es un caso particular del teorema 14.7 de [9].

Teorema 1.2. *Sea Σ definido por (1.5.2) y si se satisface*

1. *$\nabla G_i(v)$ es autovector a izquierda de $M(v)$.*
2. *Si $\nabla G_i(v)(\eta) = 0$ entonces $d^2 G_i(v)(\eta, \eta) \geq 0$.*
3. *$\nabla G_i(v) \circ f < 0$, para todo $t > 0$.*

Para todo v en la frontera $\partial\Sigma$ (es decir $G_i(v) = 0$, para algún i) y para todo $t \in (0, \infty)$ entonces Σ es una región invariante para todo $\epsilon > 0$.

1.6. Pares de entropía y flujo.

Definición 6. Un par de funciones diferenciables $\eta, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forman un par de entropía-flujo para el sistema (1.1.1) si se cumple

1. η es convexa.
2. Para todo $z \in \mathbb{R}^2$ se tiene la igualdad

$$\nabla \eta(z) DF(z) = \nabla q(z). \tag{1.6.1}$$

1.7. Elementos de compacidad compensada.

Los siguientes resultados de la teoría de compacidad compensada serán fundamentales para lograr el objetivo de este trabajo, el primer teorema será el más importante, su prueba se puede consultar en [22].

Teorema 1.3. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y u_i^ϵ sucesiones de funciones medibles débilmente convergentes en $L^2(\Omega)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ tales que*

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x} u_2^\epsilon, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_3^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x} u_4^\epsilon$$

son compactas en $H^{-1}_{loc}(\Omega)$, entonces existe una subsucesión tal que

$$Det \begin{vmatrix} u_1^\epsilon & u_2^\epsilon \\ u_3^\epsilon & u_4^\epsilon \end{vmatrix} \rightharpoonup Det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix}$$

en el sentido de las distribuciones, donde u_i es el límite débil de u_i^ϵ.

El siguiente resultado será de enorme utilidad para comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema 1.3, su demostración se puede consultar en [6].

Teorema 1.4. ***(Murat)*** *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ y $\{f_k\} = \{g_k\} + \{h_k\}$ donde*

1. *$\{f_k\}$ es acotada en $W^{-1,r}_{loc}(\Omega)$, con $2 < r \leq \infty$.*
2. *$\{g_k\}$ es precompacta en $W^{-1,2}_{loc}(\Omega)$.*
3. *$\{h_k\}$ es acotada en $\mathscr{M}(\Omega)$.*

Entonces $\{f_k\}$ es precompacta en $W^{-1,2}_{loc}(\Omega)$.

CAPÍTULO 2

Acerca del problema de Cauchy.

En esta sección se demuestra la existencia de solución débil para el problema de Cauchy (.0.1-.0.3). Con este objetivo se divide este capítulo así:

- **(Sección 2.1)** Se transforma el sistema (.0.1) en un sistema de leyes de balance. Se calculan explícitamente los valores propios y los invariantes de Riemann para el sistema homogéneo asociado.
- **(Sección 2.2)** En el problema difusivo asociado se utiliza el principio del máximo para dar estimaciones a priori para los invariantes de Riemann calculados en la sección anterior. Se determina una región invariante y acotada para obtener estimaciones a priori de las soluciones viscosas y probar la existencia de una solución global para el problema difusivo.
- **(Sección 2.3)** Se obtienen resultados sobre compacidad para las sucesiones construidas a partir de las soluciones del problema difusivo estudiado en la sección 2.2.
- **(Sección 2.4)** Con los resultados de la sección anterior se aplica el teorema 1.3 para probar la existencia de solución débil.

2.1. Valores propios e invariantes de Riemann.

Se transforma el problema (.0.1-.0.3) en forma de sistema de **leyes de balance**, haciendo el cambio de variable $m = \rho v - \rho u(\rho)$ obteniendo

$$\begin{cases} \rho_t + \big(m + \rho u(\rho)\big)_x = 0 \\ m_t + \big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\big)_x = -\frac{m}{T}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

con valor inicial

$$\Big(\rho(x,0), m(x,0)\Big) = \Big(\rho_0(x), m_0(x)\Big), \tag{2.1.2}$$

para $\rho_0, m_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, tal que la variación total de $\dfrac{m_0}{\rho_0}(x)$ sea acotada.

Lema 1. *El sistema (2.1.1-2.1.2) es estrictamente hiperbólico para $\rho \neq 0$ y tiene valores propios $\lambda_1(\rho, m) = u(p) + \dfrac{m}{p} + pu'(p)$ y $\lambda_2(\rho, m) = u(p) + \dfrac{m}{p}$.*

Demostración. La función flujo para el sistema (2.1.1-2.1.2) es $F(z_1, z_2) = \Big(z_2 + z_1 u(z_1), \dfrac{z_2^2}{z_1} + z_2 u(z_1)\Big)$ cuyo jacobiano es

$$DF(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} u(z_1) + z_1 u'(z_1) & 1 \\ z_2 u'(z_1) - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 & 2\frac{z_2}{z_1} + u(z_1) \end{bmatrix}.$$

Tiene polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\Big(2u(z_1) + 2\frac{z_2}{z_1} + z_1 u'(z_1)\Big) + 2u(z_1)\frac{z_2}{z_1} + u^2(z_1) + z_2 u'(z_1) + z_1 u(z_1) u'(z_1)) - \Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2.$$

Calculando el discriminante

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Big(2u(z_1) + 2\frac{z_2}{z_1} + z_1 u'(z_1)\Big)^2 - 4\Bigg(2u(z_1)\frac{z_2}{z_1} + u^2(z_1) + z_2 u'(z_1) + z_1 u(z_1) u'(z_1)) - \Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2\Bigg) \\
&= 4u^2(z_1) + 4\Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2 + \Big(z_1 u'(z_1)\Big)^2 + 8u(z_1)\frac{z_2}{z_1} + 4z_1 u'(z_1) u(z_1) + 4u'(z_1) z_2 \\
&- 8u(z_1)\frac{z_2}{z_1} - 4u^2(z_1) - 4z_1 u(z_1) u'(z_1) - 4z_2 u'(z_1) - 4\Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)^2 \\
&= \Big(z_1 u'(z_1)\Big)^2.
\end{aligned}$$

Entonces los valores propios de $DF(z_1, z_2)$ son

$$\lambda_1(z_1, z_2) = u(z_1) + \frac{z_2}{z_1} + z_1 u'(z_1)\,, \quad \lambda_2(z_1, z_2) = u(z_1) + \frac{z_2}{z_1}. \tag{2.1.3}$$

Los valores propios son distintos salvo que $\rho u'(\rho) = 0$, por hipótesis $u' < 0$, así que el sistema será **estrictamente hiperbólico** mientras $\rho \neq 0$. $\square$

Se encuentran explícitamente los invariantes de Riemann.

Lema 2. *El sistema (2.1.1-2.1.2) tiene invariantes de Riemann $w(\rho, m) = \dfrac{m}{\rho}$, $z(\rho, m) = \dfrac{m}{\rho} + u(\rho)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta (1.3.2), el primer invariante de Riemann $w(\rho, m)$ satisface

$$\begin{cases} \lambda_2 w_\rho - w_\rho \big(m + \rho u(\rho)\big)_\rho - w_m \big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\big)_\rho = 0 \\ \lambda_2 w_m - w_\rho \big(m + \rho u(\rho)\big)_m - w_m \big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\big)_m = 0. \end{cases}$$

Reemplazando los valores obtenidos en (2.1.3) y calculando las derivadas

$$\begin{cases} \cancel{w_\rho u(\rho)} + w_\rho \frac{m}{\rho} - \cancel{w_\rho u(\rho)} - w_\rho \rho u'(\rho) - w_m m u'(\rho) + w_m \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 = 0 \\ \cancel{w_m u(\rho)} + \cancel{w_m \frac{m}{\rho}} - w_\rho - \cancel{2} w_m \frac{m}{\rho} - \cancel{w_m u(\rho)} = 0, \end{cases}$$

obteniendo

$$\begin{cases} w_\rho \Big(\frac{m}{\rho} - \rho u'(\rho)\Big) = w_m \Big(m u'(\rho) - \left(\frac{m}{\rho}\right)^2\Big) \\ w_\rho = -w_m \frac{m}{\rho}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

La función $w(\rho, m) = \dfrac{m}{\rho}$ satisface (2.1.4) ya que

$$w_\rho = -\frac{m}{\rho^2} = -\frac{m}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -w_m \frac{m}{\rho},$$

$$w_\rho \left(\frac{m}{\rho} - \rho u'(\rho)\right) = -\frac{m}{\rho^2}\left(\frac{m}{\rho} - \rho u'(\rho)\right) = \frac{1}{\rho}\left(m u'(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}\right) = w_m \left(m u'(\rho) - \left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right).$$

Análogamente, el segundo invariante de Riemann $z(\rho, m)$ satisface

$$\begin{cases} \lambda_1 z_\rho - z_\rho \Big(m + \rho u(\rho)\Big)_\rho - z_m \Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_\rho = 0 \\ \lambda_1 z_m - z_\rho \Big(m + \rho u(\rho)\Big)_m - z_m \Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_m = 0, \end{cases}$$

reemplazando y derivando

$$\begin{cases} \cancel{z_\rho u(\rho)} + z_\rho \frac{m}{\rho} + \cancel{z_\rho \rho u'(\rho)} - \cancel{z_\rho u(\rho)} - \cancel{z_\rho \rho u'(\rho)} - z_m m u'(\rho) + z_m \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 = 0 \\ \cancel{z_m u(\rho)} + \cancel{z_m \frac{m}{\rho}} + z_m \rho u'(\rho) - z_\rho - \cancel{2} z_m \frac{m}{\rho} - \cancel{z_m u(\rho)} = 0, \end{cases}$$

obteniendo

$$\begin{cases} \frac{m}{\rho}\Big(z_\rho - z_m \rho u'(\rho) + z_m \frac{m}{\rho}\Big) = 0 \\ z_m \rho u'(\rho) - z_m \frac{m}{\rho} - z_\rho = 0. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

El sistema (2.1.5) se satisface si y sólo si $z_m\Big(\rho u'(\rho) - \dfrac{m}{\rho}\Big) - z_\rho = 0$, luego la función $z(\rho, m) = \dfrac{m}{\rho} + u(\rho)$ satisface (2.1.5) ya que

$$\left[\frac{m}{\rho} + u(\rho)\right]_m \Big(\rho u'(\rho) - \frac{m}{\rho}\Big) - \left[\frac{m}{\rho} + u(\rho)\right]_\rho = \Big(u'(\rho) - \frac{m}{\rho^2}\Big) - \Big[-\frac{m}{\rho^2} + u'(\rho)\Big] = 0.$$

Por lo tanto, los invariantes de Riemann para el problema (2.1.1) son

$$\begin{cases} w(\rho, m) = \frac{m}{\rho} \\ z(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + u(\rho). \end{cases}$$

□

2.2. Sistema difusivo.

Al agregar un término difusivo al problema (2.1.1) se obtiene el sistema parabólico asociado

$$\begin{cases} \rho_t + \Big(m + \rho u(\rho)\Big)_x = \epsilon \rho_{xx} \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\right)_x + \frac{m}{T} = \epsilon m_{xx}, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

con valor inicial

$$\Big(\rho^\epsilon(x, 0), m^\epsilon(x, 0)\Big) = \Big(\rho_0(x) + \epsilon, m_0(x)\Big), \tag{2.2.2}$$

para ρ_0, m_0 dados por (2.1.2).

El objetivo de esta sección es demostrar la existencia de solución clásica global para el problema (2.2.1-2.2.2), para ello se busca lograr las estimaciones necesarias para aplicar el siguiente teorema, probado en [15].

Teorema 2.1. *Dado el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t^1 + F^1(u^1, u^2)_x + h^1 = \epsilon u_{xx}^1 & \text{si } \ (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u_t^2 + F^2(u^1, u^2)_x + h^2 = \epsilon u_{xx}^2 & \text{si } \ (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u^1(x, 0) = g^1(x) \quad , \quad u^2(x, 0) = g^2(x), \end{cases}$$

con $\|g^1(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$, $\|g^2(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$.

Si $F^1, F^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, h^1, h^2 *funciones localmente Lipschitz continuas y existe una estimativa a priori*

$$\|u^1\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau])} \leq N(\tau), \quad \|u^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau])} \leq N(\tau),$$

para una constante positiva N que depende de τ entonces existe una única solución $(u^1, u^2) \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau])$.

Observación 5. Tomando $F^1(\rho, m) = m + \rho u(\rho)$, $F^2(\rho, m) = \frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)$, $h^1 \equiv 0$, $h^2 = \frac{m}{T}$ se tiene el sistema (2.2.1).

Las derivadas parciales de estas funciones son

$$F^1_\rho = u(\rho) + \rho u'(\rho),\ F^1_m = 1,\ F^2_\rho = mu'(\rho) - \Big(\frac{m}{\rho}\Big)^2,\ F^2_m = u(\rho) + 2\frac{m}{\rho}.$$

$$h^1_p = h^1_m = h^2_\rho \equiv 0, \quad h^2_m = \frac{1}{T}.$$

Todas estas funciones son continuas para $\rho > 0$ por lo tanto para aplicar el teorema anterior basta con obtener las estimativas a priori necesarias y mostrar que $\rho > 0$.

Primero se muestra que ρ^ϵ es estríctamente positivo.

Lema 3. *Para cualquier $\epsilon > 0$, el problema (2.2.1-2.2.2) satisface la estimativa a priori*

$$\rho^\epsilon(x,t) \geq \delta(\epsilon, t) > 0,$$

para alguna función δ.

Demostración. Se sigue la demostración usada en [3], por simplicidad se elimina el superíndice ϵ.

Sea $\psi(x,t) = -ln(\rho(x,t))$, se calcula

$$\psi_t - \epsilon\psi_{xx} = -\frac{\rho_t}{\rho} + \epsilon\Big(\frac{\rho_{xx}}{\rho} - \frac{\rho_x^2}{\rho^2}\Big).$$

Como $\rho_t = \epsilon\rho_{xx} - \big(\rho v\big)_x$

$$\begin{aligned}\psi_t - \epsilon\psi_{xx} &= \frac{(\rho v)_x - \epsilon\rho_{xx}}{\rho} + \epsilon\Big(\frac{\rho_{xx}}{\rho} - \frac{\rho_x^2}{\rho^2}\Big) = \frac{(\rho v)_x}{\rho} - \epsilon\Big(\frac{\rho_x^2}{\rho^2}\Big) = v_x - \epsilon\Big(-\frac{\rho_x v}{\epsilon\rho} + \frac{\rho_x^2}{\rho^2}\Big)\\ &= v_x - \epsilon\Big(\frac{\rho_x^2}{\rho^2} - \frac{\rho_x v}{\epsilon\rho} + \frac{v^2}{4\epsilon^2}\Big) + \frac{v^2}{4\epsilon} = v_x + \frac{v^2}{4\epsilon} - \epsilon\Big(\frac{\rho_x}{\rho} - \frac{v}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$

Obteniendo

$$\psi_t - \epsilon\psi_{xx} \leq v_x + \frac{v^2}{\epsilon}.$$

Esta ecuación tiene el núcleo del calor asociado $K_\epsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$, utilizando este núcleo

$$\psi(x,t) \leq \psi_0 * K_\epsilon + \int_0^t \left(v_x + \frac{v^2}{\epsilon}\right) *_x K_\epsilon(x,s)ds, \tag{2.2.3}$$

donde $*$ denota la convolución.

Por definición $\psi_0(x) = -ln(\rho_0^\epsilon(x))$, como el dato inicial es $p_0(x) + \epsilon$ se tiene que $\psi_0(x) \leq -ln(\epsilon)$, por lo tanto

$$\psi_0(x) * K_\epsilon(x,t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} -ln(\epsilon)K_\epsilon(y,t)dy = -ln(\epsilon)\int_{-\infty}^{\infty} K_\epsilon(y,t)dy = -ln(\epsilon).$$

Por el mismo argumento se tiene que

$$\frac{v^2}{\epsilon} *_x K_\epsilon(x,t) \leq \frac{\|v\|_\infty^2}{\epsilon}.$$

Permitiendo reescribir (2.2.3) como

$$\psi(x,t) \leq -ln(\epsilon) + \int_0^t \frac{\|v\|_\infty^2}{\epsilon}ds + \int_0^t v *_x \frac{\partial}{\partial x}K_\epsilon(x,s)ds. \tag{2.2.4}$$

Derivando y tomando valor absoluto

$$v *_x \frac{\partial}{\partial x}K_\epsilon(x,s) \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} v(x-y,s)\frac{\partial}{\partial y}K_\epsilon(y,s)dy\right| \leq 4\|v\|_\infty \int_0^\infty y\frac{1}{4\epsilon s\sqrt{4\pi\epsilon s}}e^{-\frac{y^2}{4\epsilon s}}dy.$$

Haciendo la sustitución $z = \frac{y}{\sqrt{4\epsilon s}}$

$$v *_x \frac{\partial}{\partial x}K_\epsilon(x,s) \leq \|v\|_\infty \int_0^\infty \sqrt{4\epsilon s}z\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon s}}e^{-z^2}dz = \|v\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon s}}\int_0^\infty 2ze^{-z^2}dz = \frac{\|v\|_\infty}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon s}}.$$

Haciendo $C = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ y reescribiendo (2.2.4)

$$-ln(\rho) \leq -ln(\epsilon) + \|v\|_\infty^2\frac{t}{\epsilon} + C\|v\|_\infty\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\epsilon s}}ds = -ln(\epsilon) + \|v\|_\infty^2\frac{t}{\epsilon} + C\|v\|_\infty\sqrt{\frac{t}{\epsilon}}.$$

Obteniendo

$$\rho(x,t) \geq \epsilon\ e^{-\left(\|v\|_\infty^2\frac{t}{\epsilon} + C\|v\|_\infty\sqrt{\frac{t}{\epsilon}}\right)} > 0.$$

$\square$

Ahora se encuentran estimativas a priori para los invariantes de Riemann calculados en el lema 1.

Lema 4. *Para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $\tau > 0$ existen constantes $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ independientes de ϵ tal que*

$$w(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_1(\tau), \qquad z(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_2(\tau), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\tau) \tag{2.2.5}$$

donde w, z son los invariantes de Riemann obtenidos en el lema 2 y λ_1, λ_2 son los valores propios obtenidos en el lema 1.

Demostración. Derivando se obtiene

$$\begin{cases} w_\rho = -\frac{m}{\rho^2}, \ w_m = \frac{1}{\rho}, \ w_{\rho m} = -\frac{1}{\rho^2} = w_{m\rho} \\ w_{\rho\rho} = 2\frac{m}{\rho^3}, \ w_{mm} = 0 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

y

$$\begin{cases} z_\rho = -\frac{m}{\rho^2} + u'(\rho), \ z_m = \frac{1}{\rho}, \ z_{\rho m} = -\frac{1}{\rho^2} = z_{m\rho} \\ z_{\rho\rho} = 2\frac{m}{\rho^3} + u''(\rho), \ z_{mm} = 0. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Multiplicando (2.2.1) por w_ρ y w_m respectivamente se obtiene

$$\begin{cases} w_\rho \rho_t + w_\rho m_x + w_\rho \rho_x u(\rho) + w_\rho \rho u'(\rho)\rho_x = \epsilon w_\rho \rho_{xx} \\ w_m m_t + w_m m_x \frac{2m}{\rho} - w_m \rho_x \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 + w_m m_x u(\rho) + w_m \rho_x m u'(\rho) + w_m \frac{m}{T} = \epsilon w_m m_{xx}. \end{cases}$$

Por (2.2.6) se tiene que $w_\rho = -\dfrac{m}{\rho} w_m$ y $w_m = -\dfrac{\rho}{m} w_\rho$, esto permite reescribir la expresión anterior así

$$\begin{cases} w_\rho \rho_t - w_m m_x \frac{m}{\rho} + w_\rho \rho_x u(\rho) + w_\rho \rho u'(\rho)\rho_x = \epsilon w_\rho \rho_{xx} \\ w_m m_t + w_m m_x \frac{2m}{\rho} + w_\rho \rho_x \frac{m}{\rho} + w_m m_x u(\rho) - w_\rho \rho_x \rho u'(\rho) + w_m \frac{m}{T} = \epsilon w_m m_{xx}. \end{cases}$$

Factorizando tenemos que

$$\begin{cases} w_\rho \rho_t + w_m m_x \Big(-\frac{m}{\rho} \Big) + w_\rho \rho_x \Big(u(\rho) + \rho u'(\rho) \Big) = \epsilon w_\rho \rho_{xx} \\ w_m m_t + w_m m_x \Big(\frac{2m}{\rho} + u(\rho) \Big) + w_\rho \rho_x \Big(\frac{m}{\rho} - \rho u'(\rho) \Big) + w_m \frac{m}{T} = \epsilon w_m m_{xx}, \end{cases}$$

sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$w_\rho \rho_t + w_m m_t + w_m m_x \Big(\frac{m}{\rho} + u(\rho) \Big) + w_\rho \rho_x \Big(\frac{m}{\rho} + u(\rho) \Big) + w_m \frac{m}{T} = \epsilon (w_\rho \rho_{xx} + w_m m_{xx}).$$

Como $w_t = w_\rho \rho_t + w_m m_t$, $w_x = w_\rho \rho_x + w_m m_x$ y $\lambda_2 = \dfrac{m}{\rho} + u(\rho)$, reemplazando en la expresión anterior tenemos que

$$w_t + \lambda_2 w_x + w_m \frac{m}{T} = \epsilon(w_\rho \rho_{xx} + w_m m_{xx}).$$

Como $w_{xx} = w_{\rho\rho}(\rho_x)^2 + w_{mm}(m_x)^2 + 2w_{\rho m}\rho_x m_x + w_\rho \rho_{xx} + w_m m_{xx}$,

$$w_t + \lambda_2 w_x + w_m \frac{m}{T} = \epsilon w_{xx} - \epsilon\Big(w_{\rho\rho}(\rho_x)^2 + w_{mm}(m_x)^2 + 2w_{\rho m}\rho_x m_x\Big).$$

Por (2.2.6)

$$w_t + \lambda_2 w_x = \epsilon w_{xx} - \epsilon\Big(2\frac{m}{\rho^3}(\rho_x)^2 - \frac{2}{\rho^2}\rho_x m_x\Big) - \frac{m}{\rho T}.$$

Teniendo en cuenta que $m = \rho\Big(v - u(\rho)\Big)$ y que $w_x = -\dfrac{m}{\rho^2}\rho_x + \dfrac{m_x}{\rho}$, se obtiene

$$w_t + \lambda_2 w_x = \epsilon w_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} w_x \rho_x - \frac{v - u(\rho)}{T}. \tag{2.2.8}$$

Por las condiciones (.0.2) se tiene que $-\dfrac{v - u(\rho)}{T} \leq 0$, por lo tanto,

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \epsilon w_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} w_x \rho_x. \tag{2.2.9}$$

Se busca una desigualdad similar para el segundo invariante de Riemann, multiplicando (2.2.1) por z_ρ y z_m respectivamente se obtiene

$$\begin{cases} z_\rho \rho_t + z_\rho m_x + z_\rho \rho_x \Big(u(\rho) + \rho u'(\rho)\Big) = \epsilon z_\rho \rho_{xx} \\ z_m m_t + z_m m_x \Big(\frac{2m}{\rho} + u(\rho)\Big) + z_m \rho_x \Big(m u'(\rho) - \Big(\frac{m}{\rho}\Big)^2\Big) + z_m \frac{m}{T} = \epsilon z_m m_{xx}. \end{cases}$$

Por (2.2.7) se tiene que $z_\rho = z_m \Big(\rho u'(\rho) - \dfrac{m}{\rho}\Big)$, esto permite reescribir la expresión anterior como

$$\begin{cases} z_\rho \rho_t + z_m m_x \Big(\rho u'(\rho) - \frac{m}{\rho}\Big) + z_\rho \rho_x \Big(u(\rho) + \rho u'(\rho)\Big) = \epsilon z_\rho \rho_{xx} \\ z_m m_t + z_m m_x \Big(\frac{2m}{\rho} + u(\rho)\Big) + z_\rho \rho_x \Big(\frac{m}{\rho}\Big) + z_m \frac{m}{T} = \epsilon z_m m_{xx}. \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$z_\rho \rho_t + z_m m_t + z_m m_x \Big(\frac{m}{\rho} + u(\rho) + \rho u'(\rho)\Big) + z_\rho \rho_x \Big(\frac{m}{\rho} + u(\rho) + \rho u'(\rho)\Big) + z_m \frac{m}{T} = \epsilon(z_\rho \rho_{xx} + z_m m_{xx}).$$

Como $z_t = z_\rho \rho_t + z_m m_t$, $z_x = z_\rho \rho_x + z_m m_x$ y $\lambda_1 = \dfrac{m}{\rho} + u(\rho) + \rho u'(\rho)$, reemplazando en la última expresión se tiene

$$z_t + \lambda_1 z_x + z_m \frac{m}{T} = \epsilon(z_\rho \rho_{xx} + z_m m_{xx}),$$

como $z_{xx} = z_{\rho\rho}(\rho_x)^2 + z_{mm}(m_x)^2 + 2z_{\rho m}\rho_x m_x + z_\rho \rho_{xx} + z_m m_{xx}$,

$$z_t + \lambda_1 z_x + z_m \frac{m}{T} = \epsilon z_{xx} - \epsilon\Big(z_{\rho\rho}(\rho_x)^2 + z_{mm}(m_x)^2 + 2z_{\rho m}\rho_x m_x\Big).$$

Por (2.2.7)

$$z_t + \lambda_1 z_x = \epsilon z_{xx} - \epsilon \rho_x\Big(2\frac{m}{\rho^3}\rho_x - \frac{2}{\rho^2}m_x\Big) - \epsilon u''(\rho)(\rho_x)^2 - \frac{m}{\rho T}\,,$$

teniendo en cuenta que $z_x = \Big(u'(\rho) - \dfrac{m}{\rho^2}\Big)\rho_x + \dfrac{m_x}{\rho}$, la última expresión se reescribe así

$$z_t + \lambda_1 z_x = \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho}\rho_x z_x - \frac{2\epsilon}{\rho}(\rho_x)^2 u'(\rho) - \epsilon(\rho_x)^2 u''(\rho) - \frac{v - u(\rho)}{T},$$

reordenando

$$z_t + \lambda_1 z_x = \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho}\rho_x z_x - \frac{\epsilon}{\rho}(\rho_x)^2\Big(2u'(\rho) + \rho u''(\rho)\Big) - \frac{v - u(\rho)}{T}.$$

Por las condiciones (.0.2) se tiene que $-\dfrac{\epsilon}{\rho}(\rho_x)^2\Big(2u'(\rho) + \rho u''(\rho)\Big) - \dfrac{v - u(\rho)}{T} \leq 0$, por lo tanto

$$z_t + \lambda_1 z_x \leq \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho}\rho_x z_x. \tag{2.2.10}$$

Aplicando el principio del máximo a las desigualdades (2.2.9) y (2.2.10) se obtienen las estimativas

$$w(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_1(\tau), \qquad z(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_2(\tau), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \tau].$$

Para algunas constantes $C_1(\tau), C_2(\tau)$ independientes de ϵ.

□

Con la ayuda de los resultados anteriores se procede a encontrar las estimativas a priori buscadas , primero se encuentra una región invariante acotada, para ello se prueba la siguiente proposición.

Proposición 1. *Para todo $\epsilon > 0$ y todo $\tau > 0$ el conjunto*

$$\Sigma = \{(\rho, m) : w(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_1(\tau), z(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_2(\tau), \rho^\epsilon > 0, m^\epsilon > 0\}, \tag{2.2.11}$$

es una región invariante acotada para el problema difusivo (2.2.1-2.2.2).

Demostración. Se mostrará que las funciones $G_1(\rho, m) = w(\rho, m) - C_1(\tau)$ y $G_2(\rho, m) = z(\rho, m) - C_2(\tau)$ satisfacen las hipótesis del teorema 1.2.

1. Consecuencia inmediata de la definición de invariante de Riemann y que $\nabla G_1 = \nabla w$, $\nabla G_2 = \nabla z$.

2. Calculando explícitamente $d^2G_1(\rho, m)(\eta, \eta)$ y $d^2G_2(\rho, m)(\eta, \eta)$ para $\eta = (\eta_1, \eta_2)$

$$d^2G_1(\rho, m)(\eta, \eta) = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{m}{\rho^3} & -\frac{1}{\rho^2} \\ -\frac{1}{\rho^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(2\frac{m}{\rho^3}\eta_1 - \frac{\eta_2}{\rho}\right) & -\frac{\eta_1}{\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

$$d^2G_1(\rho, m)(\eta, \eta) = 2\Big(\frac{m}{\rho^3}\eta_1^2 - \frac{\eta_1\eta_2}{\rho^2}\Big) = \frac{2\eta_1}{\rho^2}\Big(\frac{m}{\rho}\eta_1 - \eta_2\Big). \tag{2.2.12}$$

Igualmente

$$\begin{aligned} d^2G_2(\rho, m)(\eta, \eta) &= \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{m}{\rho^3} + u''(\rho) & -\frac{1}{\rho^2} \\ -\frac{1}{\rho^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left((2\frac{m}{\rho^3} + u''(\rho))\eta_1 - \frac{\eta_2}{\rho}\right) & -\frac{\eta_1}{\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$d^2G_2(\rho, m)(\eta, \eta) = \frac{2\eta_1}{\rho^2}\Big(\frac{m}{\rho}\eta_1 + \frac{u''(\rho)}{2}\eta_1 - \eta_2\Big). \tag{2.2.13}$$

Si (η_1, η_2) satisface $\nabla w(v_1, v_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$ se debe cumplir que

$$0 = -\eta_1\frac{v_2}{v_1^2} + \eta_2\frac{1}{v_1} = -\frac{1}{v_1}\Big(\frac{v_2}{v_1}\eta_1 - \eta_2\Big),$$

reemplazando en (2.2.12) y evaluando en $\rho = v_1$, $m = v_2$ se tiene

$$d^2G_1(v_1, v_2)(\eta, \eta) = \frac{2\eta_1}{v_1^2}\Big(\frac{v_2}{v_1}\eta_1 - \eta_2\Big) = \frac{2\eta_1}{v_1}\Big(0\Big) = 0. \tag{2.2.14}$$

Análogamente para tener $\nabla z(v_1, v_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$ se debe cumplir que

$$0 = -\eta_1\frac{v_2}{v_1^2} + \eta_1 u'(v_1) + \eta_2\frac{1}{v_1},$$

por lo tanto $\eta_2 = \eta_1\Big(\frac{v_2}{v_1} - v_1u'(v_1)\Big)$, reemplazando en (2.2.13) se obtiene

$$d^2G_2(v_1,v_2)(\eta,\eta) = \frac{2\eta_1}{v_1^2}\left(\frac{v_2}{v_1}\eta_1 + \frac{u''(v_1)}{2}\eta_1 - \eta_1\Big(\frac{v_2}{v_1} - v_1u'(v_1)\Big)\right),$$

de donde

$$d^2G_2(v_1,v_2)(\eta,\eta) = \frac{\eta_1^2}{v_1^2}\Big(u''(v_1) + 2v_1u'(v_1)\Big).$$

Por la condición (.0.2) se tiene que $u''(v_1) + 2v_1u'(v_1) > 0$ por lo tanto

$$d^2G_2(v_1,v_2)(\eta,\eta) \geq 0. \tag{2.2.15}$$

Las desigualdades (2.2.14-2.2.15) demuestran la segunda condición.

3. Como $f(\rho,m) = (0, -\frac{m}{T})$ entonces

$$\nabla G_i(v_1,v_2)\circ f = \Big(-\frac{v_2}{T}\Big)\frac{\partial}{\partial m}G_i(v_1,v_2).$$

Ya que $z_m = w_m = \frac{1}{\rho}$

$$\nabla G_i(v_1,v_2)\circ f = \Big(-\frac{v_2}{T}\Big)\frac{1}{v_1} = -\frac{1}{T}\frac{v_2}{v_1}.$$

Siendo ρ, m y T son positivos se obtiene

$$\nabla G_i(v_1,v_2)\circ f < 0.$$

Por el teorema 1.2 la región Σ es invariante, además las curvas $w(\rho^\epsilon, m^\epsilon) = C_1(\tau)$ y $z(\rho^\epsilon, m^\epsilon) = C_2(\tau)$ se expresan como

$$m^\epsilon = C_1(\tau)\rho^\epsilon, \qquad m^\epsilon = \rho^\epsilon C_2(\tau) - \rho^\epsilon u(\rho^\epsilon).$$

La primera es una recta, teniendo en cuenta las condiciones (.0.2) y derivando la segunda ecuación dos veces se obtiene (por simplicidad, se eliminó el superíndice ϵ)

$$\frac{d^2}{d\rho^2}m = -2u'(\rho) - \rho u''(\rho) = -\big(2u'(\rho) + \rho u''(\rho)\big) < 0.$$

Por lo tanto la región (2.2.11) es invariante y acotada. □

Lema 5. *Para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $\tau > 0$, las siguientes estimativas a priori se tienen para las soluciones del problema de Cauchy (2.2.1-2.2.2)*

$$|\rho^\epsilon(x,t)| \leq N(\tau), \qquad |m^\epsilon(x,t)| \leq N(\tau), \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\tau]$$

para alguna constante positiva $N(\tau)$ independiente de ϵ.

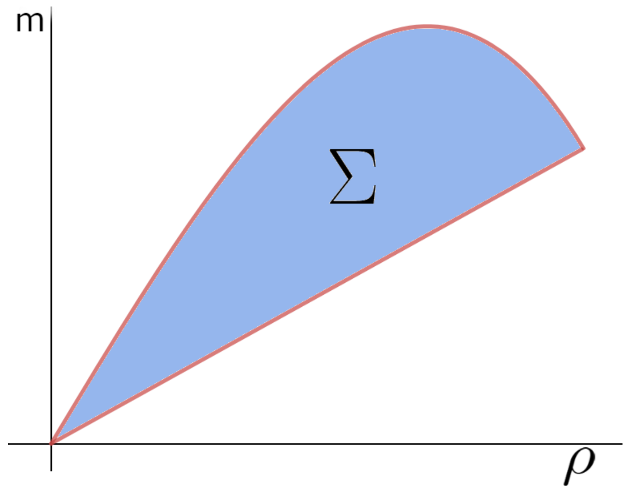

Figura 2.1: *Región invariante* Σ.

Demostración. La proposición 1 muestra que la región (2.2.11) es invariante y acotada, obtenemos la estimativa

$$|\rho^\epsilon(x,t)| \leq N(\tau), \qquad |m^\epsilon(x,t)| \leq N(\tau),$$

para una constante apropiada $N(\tau)$ independiente de ϵ.

□

Por los lemas 3 y 5 y la observación 5 es posible aplicar el teorema 2.1, obteniendo para todo $\epsilon > 0$ y todo $\tau > 0$ una solución $(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau])$ para el problema (2.2.1-2.2.2).

2.3. Resultados de compacidad.

En esta sección se consiguen las estimaciones necesarias para aplicar el teorema 1.3, el objetivo de esta sección es probar la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sean*

$$\begin{aligned}
\{u_1^\epsilon\} &= g(\rho^\epsilon), \\
\{u_2^\epsilon\} &= g(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int_k^{\rho^\epsilon} g'(s)f'(s)ds, \\
\{u_3^\epsilon\} &= \rho^\epsilon w^\epsilon, \\
\{u_4^\epsilon\} &= \rho^\epsilon w^\epsilon\Big(w^\epsilon + u(\rho^\epsilon)\Big),
\end{aligned}$$

para un subconjunto Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, w el primer invariante de Riemann, $f(s) = -su(s)$, g una función suave arbitraria y k constante, entonces $\{u_1^\epsilon\}, \{u_2^\epsilon\}, \{u_3^\epsilon\}, \{u_4^\epsilon\}$ convergen débilmente en $L^2(\Omega)$ y

$$\Big(g(\rho^\epsilon)\Big)_t + \Big(g(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int^{\rho^\epsilon} g'(s)f'(s)ds\Big)_x,$$

$$\Big(\rho^\epsilon w^\epsilon\Big)_t + \Big[\rho^\epsilon w^\epsilon\Big(w^\epsilon + u(\rho^\epsilon)\Big)\Big]_x,$$

son compactas en $H^{-1}_{loc}(\Omega)$.

Observación 6. Por el lema 5 se tiene que $\{\rho^\epsilon\}$, $\{w^\epsilon\}$ son uniformemente acotadas en $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$. Por lo tanto, también lo son las sucesiones de la proposición anterior debido a la continuidad de las funciones g , u y la desigualdad triangular.

Por el teorema de Banach-Alaoglu (ver [21]) existen subsucesiones (aún indexadas por ϵ) que son débilmente convergentes.

En lo que resta de esta sección se prueba la compacidad en $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, primero se encuentra una cota en $L^1(\mathbb{R})$ para la derivada parcial del invariante de Riemann $w_x(\bullet, t)$.

Lema 6. *Para el primer invariante de Riemann obtenido en el lema 2 se tiene que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_x|\,(x,t)dx \le M,$$

para alguna constante positiva M.

Demostración. Derivando con respecto a x la ecuación (2.2.8) y teniendo en cuenta que $w = v - u(\rho)$:

$$w_{tx} + \Big(\lambda_2 w_x\Big)_x = \epsilon w_{xxx} + \Big(\frac{2\epsilon}{\rho}w_x\rho_x\Big)_x - \frac{w_x}{T}.$$

Haciendo $\theta = w_x$ se tiene

$$\theta_t + \Big(\lambda_2\theta\Big)_x = \epsilon\theta_{xx} + \Big(\frac{2\epsilon}{\rho}\theta\rho_x\Big)_x - \frac{\theta}{T}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por una sucesión de funciones $g'(\theta,\alpha)$ indexadas por α se tiene que

$$g(\theta)_t + g'(\theta)\Big(\lambda_2\Big)_x\theta + g(\theta)_x\lambda_2 = \epsilon g'(\theta)\theta_{xx} - g'(\theta)\frac{\theta}{T} + 2\epsilon g'(\theta)\Big(\theta\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x.$$

Como $\epsilon g(\theta)_{xx} = \epsilon g''(\theta)\theta_x^2 + \epsilon g'(\theta)\theta_{xx}$:

$$g(\theta)_t + g'(\theta)\Big(\lambda_2\Big)_x\theta + g(\theta)_x\lambda_2 = \epsilon g(\theta)_{xx} - \epsilon g''(\theta)\theta_x^2 - g'(\theta)\frac{\theta}{T} + 2\epsilon g'(\theta)\Big(\theta\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x.$$

Sumando y restando $\Big(\lambda_2\Big)_x g(\theta)$, obtenemos

$$g(\theta)_t + \Big(g(\theta)\ \lambda_2\Big)_x + \Big(\lambda_2\Big)_x \Big(\theta g'(\theta) - g(\theta)\Big) = \epsilon g(\theta)_{xx} - \epsilon g''(\theta)\theta_x^2 - g'(\theta)\frac{\theta}{T} + 2\epsilon g(\theta)_x\Big(\frac{\rho_x}{\rho}\Big) + 2\epsilon g'(\theta)\theta\Big(\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x.$$

Sumando y restando $2\epsilon g(\theta)\Big(\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x$

$$g(\theta)_t + \Big(g(\theta)\ \lambda_2\Big)_x + \Big(\lambda_2\Big)_x \Big(\theta g'(\theta) - g(\theta)\Big) = \epsilon g(\theta)_{xx} - \epsilon g''(\theta)\theta_x^2 - g'(\theta)\frac{\theta}{T} + \Big(2\epsilon g(\theta)\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x + 2\epsilon\Big(\theta g'(\theta) - g(\theta)\Big)\Big(\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x.$$

Tomando $g(\theta,\alpha)$ que satisfacen $g(\theta,\alpha) \to |\theta|$, $g'(\theta,\alpha) \to sgn(\theta)$ y $g''(\theta,\alpha) \geq 0$ si $\alpha \to 0$, entonces

$$|\theta|_t + \Big(|\theta|\ \ \lambda_2\Big)_x = \epsilon\,|\theta|_{xx} - \epsilon g''(\theta)\theta_x^2 - \frac{|\theta|}{T} + \Big(2\epsilon\,|\theta|\,\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x \leq \epsilon\,|\theta|_{xx} + \Big(2\epsilon\,|\theta|\,\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x,$$

válido en el sentido de las distribuciones, integrando sobre una franja $\mathbb{R}\times(0,t)$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,t)} |\theta|_s\, ds\ dx \leq \iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,t)} \Big[\epsilon\,|\theta|_{xx} + \Big(2\epsilon\,|\theta|\,\frac{\rho_x}{\rho}\Big)_x - \Big(|\theta|\ \ \lambda_2\Big)_x\Big] ds dx,$$

obteniendo

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\,|\theta(x,t)| - |\theta(x,0)|\,\Big)\ dx \leq 0.$$

Como la variación total de $w(x,0)$ es acotada se tiene que $\int\limits_{\mathbb{R}} |\theta(x,0)|\ \ dx \leq M$ para alguna constante positiva M , por lo tanto

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |w_x(x,t)|\, dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |w_x(x,0)|\ \ dx \leq M.$$

$\square$

Con la ayuda del lema anterior se procede a probar la compacidad de las sucesiones.

Lema 7. *La sucesión*

$$\Big(g(\rho^\epsilon)\Big)_t + \Big(g(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int^{\rho^\epsilon} g'(s)f'(s)ds\Big)_x$$

es compacta en $H^{-1}_{Loc}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, donde $f(\rho) = \rho u(\rho)$ y g es una función suave arbitraria.

Demostración. Multiplicando $g'(\rho)$ en la primera ecuación del sistema (2.2.1)

$$g'(\rho)\rho_t + g'(\rho)\Big(m + \rho\ u(\rho)\Big)_x = \epsilon g'(\rho)\rho_{xx}.$$

Como $g(\rho)_t = g'(\rho)\rho_t$, $g(\rho)_{xx} = g''(\rho)(\rho_x)^2 + g'(\rho)\rho_{xx}$, $m = \rho w$,

$$\Big(g(\rho)\Big)_t + g'(\rho)\Big(\rho w + \rho\ u(\rho)\Big)_x = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} - \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2.$$

Como $\Big(\rho w + \rho\ u(\rho)\Big)_x = \rho_x w + \rho w_x - f'(\rho)\rho_x$, donde $f(\rho) = -\rho u(\rho)$,

$$\Big(g(\rho)\Big)_t + g'(\rho)\Big(\rho_x w + \rho w_x - f'(\rho)\rho_x\Big) = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} - \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2.$$

Distribuyendo y reordenando tenemos que

$$\Big(g(\rho)\Big)_t + w\Big(g(\rho)\Big)_x + g'(\rho)\rho w_x - \Big(\int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)_x = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} - \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2.$$

Sumando $g(\rho)w_x$ a ambos lados de la ecuación

$$\Big(g(\rho)\Big)_t + \Big(wg(\rho) - \int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)_x = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} - \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2 - g'(\rho)\rho w_x + g(\rho)w_x.$$

Obteniendo

$$\Big(g(\rho)\Big)_t + \Big(wg(\rho) - \int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)_x = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} - \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2 + w_x\Big(g(\rho) - g'(\rho)\rho\Big). \tag{2.3.1}$$

Se aplicará el Lema de Murat 1.4 en (2.3.1), con este objetivo se prueban las siguientes proposiciones.

Proposición 3. *La sucesión $w^\epsilon_x\Big(g(\rho^\epsilon) - g'(\rho^\epsilon)\rho^\epsilon\Big)$ es acotada en $\mathscr{M}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.*

Demostración. Sea Ω un subconjunto compacto de $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, teniendo en cuenta que g es continuamente diferenciable y que p^ϵ es acotada independientemente de ϵ:

$$\iint\limits_{\Omega} \left|g(\rho^\epsilon) - g'(\rho^\epsilon)\rho^\epsilon\right| |w_x|\, dx\ dt \leq C_1 \iint\limits_{\Omega} |w_x|\, dx\ dt.$$

Por la estimación obtenida en el lema 6, se tiene

$$\iint\limits_{\Omega} \left|g(\rho^\epsilon) - g'(\rho^\epsilon)\rho^\epsilon\right| |w_x|\, dx\ dt \leq C_1 M \int_{\Omega_t} dt = C_1 M \mu(\Omega_t)$$

donde $\mu(\Omega_t)$ denota la medida de la segunda proyección de Ω.

Por lo tanto la sucesión es uniformemente acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ lo cual implica que es acotada en $\mathscr{M}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. □

Proposición 4. *La sucesión $\epsilon g''(\rho^\epsilon)\big(\rho^\epsilon_x\big)^2$ es acotada en $\mathscr{M}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.*

Demostración. Por (2.3.1) se tiene que

$$\epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2 = \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx} + w_x\Big(g(\rho) - g'(\rho)\rho\Big) - \Big(g(\rho)\Big)_t - \Big(wg(\rho) - \int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)_x.$$

Multiplicando por una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ e integrando

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2\phi\ dt\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx}\phi\ dt\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} w_x\Big(g(\rho) - g'(\rho)\rho\Big)\phi\ dt\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \Big(g(\rho)\Big)_t\phi\ dt\ dx \\ &- \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \Big(wg(\rho) - \int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)_x\phi\ dt\ dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \epsilon g''(\rho)(\rho_x)^2\phi\ dt\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \epsilon g(\rho)\phi_{xx}\ dt\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} w_x\Big(g(\rho) - g'(\rho)\rho\Big)\phi\ dt\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g(\rho)\phi_t\ dt\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \Big(wg(\rho) - \int^\rho f'(s)g'(s)ds\Big)\phi_x\ dt\ dx \leq N,\end{aligned}$$

para una constante positiva N que depende de ϕ, por lo tanto la sucesión $g''(\rho^\epsilon)\big(\rho^\epsilon_x\big)^2$ es acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ lo cual implica que es acotada en $\mathscr{M}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

□

Proposición 5. *La sucesión $\epsilon\Big(g(\rho^\epsilon)\Big)_{xx}$ es compacta en $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.*

Demostración. Sea $\phi \in H_0^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ e integrando por partes tenemos

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx}\phi\ dx\ dt\right| = \left|\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{x}\phi_x\ dx\ dt\right| \leq \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\left|\Big(g(\rho)\Big)_{x}\phi_x\right| dx\ dt.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx}\phi\ dx\ dt\right| \leq \left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon^2\Big(g(\rho)\Big)_{x}^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \phi_x^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx}\phi\ dx\ dt\right| \leq \sqrt{\epsilon}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g'(\rho)\Big)^2\rho_x^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \phi_x^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\sqrt{\epsilon}g'(\rho)\rho_x \in L^2_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g(\rho)\Big)_{xx}\phi\ dx\ dt\right| \leq \lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon\Big(g'(\rho)\Big)^2\rho_x^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \phi_x^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

por lo tanto la sucesión $\epsilon\Big(g(\rho^\epsilon)\Big)_{xx}$ es compacta en $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

$\square$

Ahora se concluirá la prueba del lema 7.

Como $\Big(g(\rho^\epsilon)\Big)_t + \Big(g(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int^{\rho^\epsilon} g'(s)f'(s)ds\Big)_x$ es uniformemente acotada en $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, por las proposiciones 3, 4 y 5 se cumplen las hipótesis del teorma 1.4, luego la sucesión es compacta en $H^{-1}_{Loc}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$.

$\square$

Lema 8. *Las funciones*

$$\eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon) = G\Big(\frac{m^\epsilon}{\rho^\epsilon}\Big)\rho^\epsilon \quad y \quad q(\rho^\epsilon, m^\epsilon) = G\Big(\frac{m^\epsilon}{\rho^\epsilon}\Big)\big(m^\epsilon + \rho^\epsilon u(\rho^\epsilon)\big)$$

forman un par de entropía-flujo para el sistema (2.2.1), donde G es una función suave convexa.

Demostración. 1. Se mostrará que $\eta(\rho, m)$ es convexa.

Calculando las derivadas

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{m^2}{\rho^3} G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big), \quad \eta_{m\rho} = -\frac{m}{\rho^2} G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big), \quad \eta_{mm} = \frac{1}{\rho} G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big).$$

La matríz Hessiana asociada a $\eta(\rho, m)$ es

$$H\eta(\rho, m) = \begin{bmatrix} G''(\frac{m}{\rho})\frac{m^2}{\rho^3} & -G''(\frac{m}{\rho})\frac{m}{\rho^2} \\ -G''(\frac{m}{\rho})\frac{m}{\rho^2} & G''(\frac{m}{\rho})\frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

con polinomio característico

$$\lambda\left[\lambda - \left(\frac{1}{\rho} G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big) + \frac{m^2}{\rho^3} G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big)\right)\right].$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big)\Big(\frac{1}{\rho} + \frac{m^2}{\rho^3}\Big)$, ya que G es convexa y $\rho > 0$ por el lema 3 ambas raíces son no negativas, por lo tanto η es convexa.

2. Tomando la matriz DF calculada en el lema 1, se tiene que $\nabla\eta \; DF(\rho, m) = \nabla q(\rho, m)$.

□

Lema 9. *La sucesión*

$$\Big(\rho^\epsilon w^\epsilon\Big)_t + \Big[\rho^\epsilon w^\epsilon\Big(w^\epsilon + u(\rho^\epsilon)\Big)\Big]_x$$

es compacta en $H^{-1}_{Loc}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Demostración. Multiplicando el sistema (2.2.1) por $(\eta_\rho(\rho, m), \eta_m(\rho, m))$, donde η es la entropía del lema 8,

$$\eta_\rho \rho_t + \eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_x + \eta_m m_t + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\Big)_x = \epsilon\eta_\rho\rho_{xx} + \epsilon\eta_m m_{xx} - \eta_m \frac{m}{T}.$$

Por la regla de la cadena $\eta_{xx} - \rho_x\eta_{\rho x} - m_x\eta_{mx} = \eta_\rho\rho_{xx} + \eta_m m_{xx}$, $\eta_t = \eta_\rho\rho_t + \eta_m m_t$, se tiene

$$\eta_t + \eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_x + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\Big)_x = \epsilon\Big(\eta_{xx} - \rho_x\eta_{\rho x} - m_x\eta_{mx}\Big) - \eta_m \frac{m}{T}.$$

Nuevamente por regla de la cadena $\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_x = \Big(m + \rho u(\rho)\Big)_\rho \rho_x + \Big(m + \rho u(\rho)\Big)_m m_x$, $\Big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\Big)_x = \Big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\Big)_\rho \rho_x + \Big(\frac{m^2}{\rho} + m u(\rho)\Big)_m m_x$ permitiendo reescribir la ecuación anterior como

$$\epsilon\Big(\eta_{xx} - \rho_x\eta_{\rho x} - m_x\eta_{mx}\Big) - \eta_m\frac{m}{T} = \eta_t + \rho_x\Big[\eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_\rho + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_\rho\Big]$$
$$+ m_x\Big[\eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_m + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_m\Big].$$

Por el lema 8 se sabe que $q_\rho = \Big[\eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_\rho + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_\rho\Big]$, $q_m = \Big[\eta_\rho\Big(m + \rho u(\rho)\Big)_m + \eta_m\Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho)\Big)_m\Big]$, entonces

$$\eta_t + q_\rho\rho_x + q_m m_x = \epsilon\Big(\eta_{xx} - \rho_x\eta_{\rho x} - m_x\eta_{mx}\Big) - \eta_m\frac{m}{T}.$$

Por regla de la cadena

$$\eta_t + q_x = \epsilon\eta_{xx} - \epsilon\Big(\rho_x\eta_{\rho x} + m_x\eta_{mx}\Big) - \eta_m\frac{m}{T}.$$

Reemplazando los valores de $\eta_{\rho x}$, η_{mx}, η_ρ y reordenando se obtiene

$$\eta_t + q_x = \epsilon\eta_{xx} - \frac{\epsilon}{\rho}G''\Big(\frac{m}{\rho}\Big)\Big(\frac{m^2}{\rho^2}\rho_x^2 - 2\frac{m}{\rho}m_x\rho_x + m_x^2\Big) - G'(\frac{m}{\rho})\frac{m}{T}.$$

Reemplazando $w = \frac{m}{\rho}$ y factorizando

$$\eta_t + q_x = \epsilon\eta_{xx} - \frac{\epsilon}{\rho}G''(w)\Big(m_x - \frac{m}{\rho}\rho_x\Big)^2 - G'(w)\frac{m}{T}.$$

Esta última expresión es equivalente a

$$\eta_t + q_x = \epsilon\eta_{xx} - \epsilon G''(w)\rho w_x^2 - G'(w)\frac{m}{T}.$$

Teniendo en cuenta que m, T son positivos, escogiendo una función creciente G, se tiene la desigualdad

$$\epsilon G''(w)\rho w_x^2 \le \epsilon\eta_{xx} - \eta_t - q_x.$$

Multiplicando por una función $\phi \in C_0^\infty\big(\mathbb{R}\times(0,\infty)\big)$ e integrando por partes

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \epsilon G''(w)\rho w_x^2\phi\; dt\; dx \le \iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \epsilon\eta\phi_{xx}\; dt\; dx + \iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \epsilon\eta\phi_t\; dt\; dx + \iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \epsilon q\phi_x\; dt\; dx \le M,$$

para una constante M que depende de ϕ, por lo tanto la sucesión $\epsilon G''(w^\epsilon)\rho^\epsilon\Big(w_x^\epsilon\Big)^2$ es acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, escogiendo una función G estrictamente convexa se tiene que $\epsilon\rho^\epsilon\big(w_x^\epsilon\big)^2$ es acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

Por la segunda ecuación en (2.2.1) basta con mostrar la compacidad de $\epsilon(w\rho)_{xx}$, se puede reescribir como $\epsilon(w_x\rho + w\rho_x)_x$, multiplicando por una función $\phi \in H_0^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ e integrando por partes

$$\left|\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\Big(w\rho_x + \rho w_x\Big)_x \phi \; dx \; dt\right| = \left|\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\Big(w\rho_x + \rho w_x\Big)\phi_x \; dx \; dt\right|.$$

Por la desigualdad triangular

$$\left|\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\Big(w\rho_x + \rho w_x\Big)_x \phi \; dx \; dt\right| \leq \iint\limits_{t\geq 0} |\epsilon w\rho_x\phi_x| \; dx \; dt + \iint\limits_{t\geq 0} |\epsilon\rho w_x\phi_x| \; dx \; dt.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\Big(w\rho_x + \rho w_x\Big)_x \phi \; dx \; dt\right| &\leq \sqrt{\epsilon}\Big(\iint\limits_{t\geq 0} w^2\phi_x^2 \; dx \; dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\rho_x^2 \; dx \; dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{\epsilon}\Big(\iint\limits_{t\geq 0} \rho\phi_x^2 \; dx \; dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\rho w_x^2 \; dx \; dt\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Como $\epsilon\rho^\epsilon\big(w_x^\epsilon\big)^2, \epsilon g''(\rho^\epsilon)\big(\rho_x^\epsilon\big)^2$ son acotadas en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, usando una función g estríctamente convexa y tomando límite en la expresión anterior se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\iint\limits_{t\geq 0} \epsilon\Big(w\rho_x + \rho w_x\Big)_x \phi \; dx \; dt\right| = 0,$$

por lo tanto $\epsilon(w^\epsilon\rho^\epsilon)_{xx}$ es compacta, luego $\Big(\rho^\epsilon w^\epsilon\Big)_t + \Big[\rho^\epsilon w^\epsilon\Big(w^\epsilon + u(\rho^\epsilon)\Big)\Big]_x$ es compacta. $\square$

Los lemas 7 y 9 junto a la observación 6 prueban la proposición 2.

2.4. Convergencia a solución débil.

Primero se muestra la convergencia puntual para una subsucesión de $\{\rho^\epsilon\}$ y $\{m^\epsilon\}$.

Usando la proposición 2 y tomando $g(\rho) = -\rho u(\rho) = f(\rho)$ y $g(\rho) = \rho$ respectivamente se tiene que las sucesiones

$$
\begin{aligned}
\{u_1^\epsilon\} &= f(\rho^\epsilon),\\
\{u_2^\epsilon\} &= f(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds,\\
\{u_3^\epsilon\} &= \rho^\epsilon,\\
\{u_4^\epsilon\} &= \rho^\epsilon w^\epsilon - f(\rho^\epsilon),
\end{aligned}
$$

satisfacen las hipótesis del teorema 1.3, por lo tanto

$$\overline{u_1^\epsilon u_4^\epsilon - u_2^\epsilon u_3^\epsilon} = \overline{u_1^\epsilon}\ \overline{u_4^\epsilon} - \overline{u_2^\epsilon}\ \overline{u_3^\epsilon}, \tag{2.4.1}$$

donde $\overline{u_i^\epsilon}$ denota el límite débil de u_i^ϵ en el sentido de las distribuciones.
Debido a que

$$u_1^\epsilon u_4^\epsilon - u_2^\epsilon u_3^\epsilon = f(\rho^\epsilon)\Big(\rho^\epsilon w^\epsilon - f(\rho^\epsilon)\Big) - \rho^\epsilon\Big(f(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds\Big),$$

$$u_1^\epsilon u_4^\epsilon - u_2^\epsilon u_3^\epsilon = \rho^\epsilon \int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \Big(f(\rho^\epsilon)\Big)^2.$$

Reemplazando en (2.4.1) se obtiene

$$\overline{\rho^\epsilon \int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \Big(f(\rho^\epsilon)\Big)^2} = \overline{f(\rho^\epsilon)}\ \overline{\rho^\epsilon w^\epsilon - f(\rho^\epsilon)} - \overline{\rho^\epsilon}\ \overline{f(\rho^\epsilon)w^\epsilon - \int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds}.$$

Sea $\rho = \overline{\rho^\epsilon}$ y teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_k^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds = \int_\rho^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \int_\rho^{k} (f')^2(s)ds$, se tiene que

$$\overline{\rho^\epsilon \int_\rho^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \Big(f(\rho^\epsilon)\Big)^2} = \overline{f(\rho^\epsilon)}\ \overline{\rho^\epsilon w^\epsilon} - \Big(\overline{f(\rho^\epsilon)}\Big)^2 + \rho\,\overline{\int_\rho^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds} - \overline{\rho^\epsilon}\ \overline{f(\rho^\epsilon)w^\epsilon}.$$

La última expresión se reescribe como

$$\overline{\Big(\rho^\epsilon - \rho\Big) \int_\rho^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \Big(f(\rho^\epsilon)\Big)^2} = \overline{f(\rho^\epsilon)}\ \overline{\rho^\epsilon w^\epsilon} - \Big(\overline{f(\rho^\epsilon)}\Big)^2 - \overline{\rho^\epsilon}\ \overline{f(\rho^\epsilon)w^\epsilon}.$$

Sumando $\overline{2f(\rho)f(\rho\epsilon)} - \Big(f(\rho)\Big)^2$ y reagrupando se obtiene

$$\overline{\Big(\rho^\epsilon - \rho\Big) \int_\rho^{\rho^\epsilon} (f')^2(s)ds - \Big(f(\rho^\epsilon) - f(\rho)\Big)^2} = \overline{f(\rho^\epsilon)}\ \overline{\rho^\epsilon w^\epsilon} - \Big(\overline{f(\rho^\epsilon)} - f(\rho)\Big)^2 - \overline{\rho^\epsilon}\ \overline{f(\rho^\epsilon)w^\epsilon}.$$

Obteniendo la igualdad

$$\overline{\left(\rho^\epsilon-\rho\right)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\left(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\right)^2}+\left(\overline{f(\rho^\epsilon)}-f(\rho)\right)^2=\overline{f(\rho^\epsilon)}\;\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{f(\rho^\epsilon)w^\epsilon}. \tag{2.4.2}$$

Nuevamente usando la proposición 2 y tomando $g(s)=s$, por el teorema 1.3 se tiene

$$\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon-f(\rho^\epsilon)}-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2-w^\epsilon f(\rho^\epsilon)}=\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon\left[\rho^\epsilon w^\epsilon-f(\rho^\epsilon)\right]-\rho^\epsilon\left[\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2-w^\epsilon f(\rho^\epsilon)\right]}=0,$$

por lo tanto,

$$\left(\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\right)^2-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2}=\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\;\overline{f(\rho^\epsilon)}-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{f(\rho^\epsilon)}.$$

Reemplazando en (2.4.2)

$$\overline{\left(\rho^\epsilon-\rho\right)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\left(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\right)^2}+\left(\overline{f(\rho^\epsilon)}-f(\rho)\right)^2=\left(\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\right)^2-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2}. \tag{2.4.3}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\right)^2=\left(\int_\rho^{\rho^\epsilon}f'(s)ds\right)^2\leq\left(\rho^\epsilon-\rho\right)\left(\int_\rho^{\rho^\epsilon}\left(f'(s)\right)^2ds\right),$$

$$\left(\int_\Omega\rho^\epsilon w^\epsilon\;dx\;dt\right)^2=\left(\int_\Omega\left(\rho^\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left(\rho^\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}w^\epsilon\;dx\;dt\right)^2\leq\left(\int_\Omega\rho^\epsilon\;dx\;dt\right)\left(\int_\Omega\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2\;dx\;dt\right).$$

Por lo tanto

$$\overline{\left(\rho^\epsilon-\rho\right)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\left(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\right)^2}\geq 0,$$

$$\left(\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\right)^2-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2}\leq 0.$$

Entonces la ecuación (2.4.3) satisface

$$0\leq\overline{\left(\rho^\epsilon-\rho\right)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\left(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\right)^2}+\left(\overline{f(\rho^\epsilon)}-f(\rho)\right)^2=\left(\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\right)^2-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\left(w^\epsilon\right)^2}\leq 0,$$

obteniendo

$$\overline{\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2}+\Big(\overline{f(\rho^\epsilon)}-f(\rho)\Big)^2=0, \tag{2.4.4}$$

$$\Big(\overline{\rho^\epsilon w^\epsilon}\Big)^2-\overline{\rho^\epsilon}\;\overline{\rho^\epsilon\Big(w^\epsilon\Big)^2}=0. \tag{2.4.5}$$

De (2.4.4) se tiene que $\Big(\overline{f(\rho^\epsilon)}-f(\rho)\Big)^2=0$ dando la convergencia $f(\rho^\epsilon)\to f(\rho)$, además

$$\overline{\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2}=0$$

implica

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint\limits_{\Omega}\left(\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2\right)dxdt=0,$$

por lo tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint\limits_{\Omega_\alpha}\left(\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2\right)dxdt=0, \tag{2.4.6}$$

donde $\Omega_\alpha=\{(x,t)\in\Omega:|p^\epsilon-p|>\alpha\}$.

Se calcula $\frac{d}{d\theta}\left[\Big(\theta-\rho\Big)\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)^2\right]$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left[\Big(\theta-\rho\Big)\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)^2\right]&=\Big(\theta-\rho\Big)(f'(\theta))^2\\&\quad+\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-2\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)f'(\theta)\\&=\int_\rho^\theta(f'(\theta))^2ds+\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-\int_\rho^\theta 2f'(\theta)ds\\&=\int_\rho^\theta\Big(f'(\theta)-f'(s)\Big)^2ds.\end{aligned}$$

Como $f''(s)=-2u'(s)-su''(s)$ es distinta a cero en casi todas partes, la aplicación $\theta\to\Big(\theta-\rho\Big)\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)^2$ es creciente, por lo tanto para $\rho^\epsilon>\rho+\alpha$

$$\Big(\theta-\rho\Big)\int_\rho^\theta(f')^2(s)ds-\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)^2>\alpha\int_\rho^{\alpha+\rho}(f')^2(s)ds-\Big(f(\alpha+\rho)-f(\rho)\Big)^2.$$

Como el lado derecho de la última desigualdad es no negativo se tiene

$$\Big(\theta-\rho\Big)\int_\rho^\theta (f')^2(s)ds-\Big(f(\theta)-f(\rho)\Big)^2>C_\alpha,$$

para alguna constante positiva C_α independiente de ϵ, luego

$$\iint\limits_{\Omega_\alpha^+}\bigg(\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2\bigg)dxdt>C_\alpha\mu\Big(\Omega_\alpha^+\Big),$$

donde $\Omega_\alpha^+=\{(x,t)\in\Omega:\ \rho^\epsilon-\rho>\alpha\}$, análogamente

$$\iint\limits_{\Omega_\alpha^-}\bigg(\Big(\rho^\epsilon-\rho\Big)\int_\rho^{\rho^\epsilon}(f')^2(s)ds-\Big(f(\rho^\epsilon)-f(\rho)\Big)^2\bigg)dxdt>C_\alpha\mu\Big(\Omega_\alpha^-\Big),$$

donde $\Omega_\alpha^-=\{(x,t)\in\Omega:\ \rho^\epsilon-\rho<-\alpha\}$.

En virtud de (2.4.6) se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to0}\mu\Big(\Omega_\alpha\Big)=0.$$

Luego ρ^ϵ converge a ρ en medida, y por lo tanto existe una subsucesión (aún denotada) ρ^ϵ que converge a ρ en casi todas partes y de (2.4.5) se tiene la convergencia de w^ϵ.

Por lo tanto existe una subsucesión $(\rho^\epsilon,m^\epsilon)$ que converge a (ρ,m) en casi todas partes.

Finalmente se muestra que (ρ,m) es solución débil para el sistema (2.1.1-2.1.2).

Sea $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, multiplicando por ϕ la primera ecuación sistema difusivo (2.2.1) e integrando tenemos que

$$\iint\limits_{t\geq0}p_t^\epsilon\phi\ dx\ dt+\iint\limits_{t\geq0}\Big(m^\epsilon+\rho^\epsilon u(\rho^\epsilon)\Big)_x\phi\ dx\ dt-\iint\limits_{t\geq0}\epsilon\rho_{xx}^\epsilon\ \phi\ dx\ dt=0.$$

Integrando por partes

$$\iint\limits_{t\geq0}\rho^\epsilon\phi_t\ dx\ dt+\iint\limits_{t\geq0}\Big(m^\epsilon+\rho^\epsilon u(\rho^\epsilon)\Big)\phi_x\ dx\ dt+\iint\limits_{t\geq0}\epsilon\rho^\epsilon\ \phi_{xx}\ dx\ dt+\int_{-\infty}^\infty\rho^\epsilon(x,0)\phi(x,0)dx=0. \tag{2.4.7}$$

Análogamente para la segunda ecuación del sistema difusivo (2.2.1)

$$\iint\limits_{t\geq 0} m^\epsilon \phi_t \; dx \; dt + \iint\limits_{t\geq 0} \Big(\frac{(m^\epsilon)^2}{\rho^\epsilon} + m^\epsilon u(\rho^\epsilon) \Big) \phi_x \; dx \, dt - \iint\limits_{t\geq 0} \epsilon m^\epsilon \; \phi_{xx} \; dx \, dt$$
$$+ \iint\limits_{t\geq 0} \frac{m^\epsilon}{T} \; \phi \; dx \; dt + \int_{-\infty}^{\infty} m^\epsilon(x,0)\phi(x,0)dx = 0.$$

Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ en la última expresión y en (2.4.7) se tiene

$$\iint\limits_{t\geq 0} \rho\phi_t \; dx \; dt + \iint\limits_{t\geq 0} \Big(m + \rho u(\rho) \Big) \phi_x \; dx \; dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,0)\phi(x,0)dx = 0,$$

$$\iint\limits_{t\geq 0} m\phi_t \; dx \; dt + \iint\limits_{t\geq 0} \Big(\frac{m^2}{\rho} + mu(\rho) \Big) \phi_x \; dx \; dt + \iint\limits_{t\geq 0} \frac{m}{T} \; \phi \; dx \; dt + \int_{-\infty}^{\infty} m(x,0)\phi(x,0)dx = 0.$$

Las últimas expresiones muestran que en efecto (ρ, m) es solución débil para el problema de Cauchy (2.1.1-2.1.2).

3

Bibliografía

[1] A. Aw y M. Rascle, *Resurrection of "second order"models of traffic flow*, Indiana. Uni. Math. J., **26** (2000) , 373-392. II, III

[2] B. Keyfitz y H. Kranzer, *A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **72** (1980) , 219-241.

[3] B. Perthame, *Kinetic formulation of conservations laws*, Oxford University Press, (2002). 17

[4] C. F. Daganzo, *Requiem for high-order fluid approximations of traffic flow*, Trans. R(ES. Mech. Anal., **29B** No. 4 (1995) , 277-286. III

[5] F. Siebel y W. Mauser, *On the fundamental diagram of traffic flow*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **Vol 66**, No. 4 (2006), 1150-1162. III

[6] Hermano Frid Neto, *Compacidade compensada aplicada às leis de conservação*, 19 colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto De Mtemática Pura E Aplicada. 12

[7] H. N. Zhang, *A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior*, Trans. R(ES. Res. B, **36** (2002) , 275-298. III

[8] J.M Greenberg, *Extensions and Amplifications of a Traffic Model of Aw and Rascle*, SIAM Journal of Applied Mathemathics, **Vol 62** (2001), 729-745. II, III, IV

[9] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Velaf, Berlin-Heidelberg. New York, (1983). 4, 11

[10] K. N. Chuch, C. C. Conley y J. A. Smoller, *Positive invariant regions for systems of nonlinear equations*, Indiana. Univ. Math. J., **Vol 26** (1977), 373-392.

[11] L. Evans, *Partial differential equations*, Vol.19 American Mathematical Society, 1998. 2

[12] L. Tartar, *The compensated compactness method applied to systems of conservations laws*, J. M. Ball ed., Systems of Nonlinear P.D.E., 263-285.

[13] M. Godvik y H. Hanche-Olsen, *Existence of solutions for the Aw-Rascle traffic flow model with vacuum*, J. Hyperbolic Differ. Qeu., **5** (2008), 45-64. III

[14] M. Rascle, *An improved macroscopic model of traffic flow: Derivation and links with the Lighthill-Whithm model*, Math. Comput. Model. **35**(56) (2002), 581-590. Traffic flow Modelling and simulation. III

[15] M. Tao, Z. Cheng y J. Yan, *Conservation Laws 1 : Viscosity Solutions*, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol 41 (2007), 81-90. IV, 16

[16] P. Bagnerini, R. M. Colombo y A. Corli, *On the role of source terms in continuoum traffic flow models*, Math. Comput Modelling, **44** (9-10) (2006), 917-930. III

[17] R.M Colombo, *A* 2×2 *hyperbolic traffic flow model* , Math. Comput Modelling, **35** (2002), 683-688.

[18] S. Mochon, *An analysis of the traffic on highways with changing surface conditions*, Math. Modelling, **9**(1) (1987), 1-11.

[19] T. Li, *Global solutions and zero relaxation limit for a traffic flow model*, SIAM Journal of Applied Mathemathics, **61**(3) (2000), 1042-1065 (electronic). III

[20] T. Li, *Global solutions of nonconcave hyperbolic conservation loss with relaxation arising from traffic flow*,J. Differential Equations, **190** (1) (2003), 131-149. III

[21] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Velaf, New York, 2011. 25

[22] Y.G Lu, *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method*, Vol. 128, Chapman and Hall, New York, 2002. 12

[23] Y.G Lu, *Existence Of Global Bounded Weak Solutions To Nonsymmetric Systems Of Keyfitz-Kranzer Type*. Journal of Functional Analysis 261.10 (2011): 2797-2815. Web. III, IV